

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.372

Спектральный анализ цифровых квазипериодических сигналов

В.А. Двинских

Вычисление спектра производится в связи с оценкой спектра в полосе частот и для определения параметров отдельных частотных составляющих. Показано, что дискретное преобразование Фурье и параметрический метод следует использовать только для оценки спектра. Для спектрального анализа цифровых квазипериодических сигналов целесообразно применять методику, основанную на аппроксимации последовательности отсчетов данных тригонометрическим полиномом первого порядка с изменяющейся частотой его гармонических функций.

Введение

Во многих областях науки и техники часто возникает необходимость в определении спектра. В настоящее время в научной литературе основное внимание уделяется задаче спектрального оценивания [1]. Здесь с успехом используется параллельный спектральный анализ, формирующий по отсчетам данных, за вычетом постоянной составляющей, некоторую функцию частоты. При этом для получения более наглядных результатов применяется операция усреднения с использованием отдельных частотных интервалов спектра.

Имеются многочисленные приложения, где основной интерес представляет лишь локальное поведение спектральной оценки в узком диапазоне частот, например оценивание частоты синусоиды в белом шуме [1]. Использование для этой цели параллельного спектрального анализа, в большинстве случаев, не обеспечивает высокого разрешения.

В последние годы [2-4] для оценки параметров периодических составляющих цифровых сигналов начинает находить распространение последовательный спектральный анализ, при аппроксимации последовательности отсчетов данных тригонометрическим полиномом первого порядка, с изменяющейся частотой его гармонических функций. При этом обеспечивается одновременное вычисление постоянной составляющей, что позволяет производить анализ в реальном вре-

мени. Например, при оценке пульсаций солнечной радиации по этой методике удалось получить [5] более высокое разрешение, чем при параллельном спектральном анализе.

Целью работы является сопоставление параллельного и последовательного спектрального анализа цифровых квазипериодических сигналов при вычислении параметров гармонических составляющих этих сигналов.

1. Параллельный спектральный анализ

Стационарный временной ряд, как правило, имеет определенное смещение относительно нулевого уровня. С точки зрения спектрального анализа спектр такого ряда теоретически имеет отличную от нуля составляющую на нулевой частоте, что может приводить к искажению спектральной оценки. В связи с этим временной ряд центрируют, то есть из отсчетов ряда вычитают выборочное среднее и получают новую последовательность. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) при бесконечном числе отсчетов дает истинное значение спектра процесса. Однако на практике имеем конечную последовательность в виде прямоугольного окна наблюдения и получаем искаженную оценку спектра. Предположим [6], что временной ряд является выборкой из двух гармонических составляющих с частотами ω_1 и ω_2 , причем ω_1 совпадает с одной из частот ДПФ $\omega_k = 2\pi k / (N\Delta t)$ при $k = 0, 1, \dots, N-1$ и Δt — интервал между отсчетами, а разность $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ также отличается от частот ДПФ. Применяя ДПФ к выбор-

В.А. Двинских

г. Саратов, Саратовское высшее командно-инженерное училище ракетных войск

ке $x(n) = A_1 e^{j\omega_1 n} + A_2 e^{j\omega_2 n}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ получим последовательность отсчетов спектра $X(\omega_k)$. При этом $X(\omega_1) = A_1 + A_2 Y(\omega_1 - \omega_2)$, где $Y(\omega_1 - \omega_2)$ — спектральная составляющая. Кроме того, наличие во временном ряду составляющей с частотой ω_2 , не равной частоте ДПФ, приводит к появлению в ДПФ-спектре ненулевых отсчетов на всех частотах. Это явление называется «размыванием» спектра из-за «просачивания» спектральных составляющих. В частном случае, при ω_1 и ω_2 , совпадающих с соответствующими частотами ДПФ, спектр $X(\omega_k)$ будет точной копией истинного спектра.

Уровни боковых частотных лепестков прямоугольного окна имеют недопустимо большие значения. Поэтому на практике применяют другие окна, с меньшим уровнем боковых частотных лепестков, но с более широким главным лепестком, что ухудшает частотное разрешение.

В настоящее время для вычисления спектра действительной последовательности используют дискретное преобразование Фурье (ДПФ), в основе которого лежит предположение о том, что эта последовательность $x(n)$, содержащая N отсчетов, рассматривается как сигнал периода T_p с основной частотой $F_1 = 1/T_p$. Согласно [6] гармонические комплексные составляющие могут быть определены из выражения

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn},$$

где

$$W = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$$

при

$$k = \begin{cases} 0, 1, \dots, N/2 - \text{если } N \text{ четное} \\ 0, 1, \dots, (N-1)/2 - \text{если } N \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Таким образом, для N значений данных получаем в два раза меньше значений частотных составляющих. При этом $X^*(N-k) = X(k)$ (знак * обозначает комплексное сопряжение), а переход к действительным значениям осуществляется по следующим формулам:

$$\operatorname{Re} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos(2\pi nk / N),$$

$$\operatorname{Im} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin(2\pi nk / N),$$

причем $\operatorname{Re} X(k) = \operatorname{Re} X(-k)$ — четная функция, а

$\operatorname{Im} X(k) = -\operatorname{Im} X(-k)$ — нечетная функция.

Набор алгоритмов, называемых алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ), включает в себя разнообразные методы уменьшения времени вычислений ДПФ. Основная идея БПФ состоит в том, чтобы разбить исходную последовательность на две более короткие последовательности, ДПФ которых в совокупности дает искомое ДПФ за меньшее время вычислений. Например, [7] для последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ при $N_1 = N/2$, введем две последовательности из четных и нечетных членов, соответственно $x(n) = x(2n)$, $n = 0, 1, \dots, N_1 - 1$, $x_2(n) = x(2n + 1)$. Далее, каждая из этих последовательностей, в свою очередь разбивается на две последовательности, из четных и нечетных членов. Процесс уменьшения размера ДПФ может быть продолжен до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ, в результате, при $N = 1024$ вычисления ускоряется в 100 раз. Особенности алгоритмов БПФ является, во-первых, необходимость запоминания всей последовательности отсчетов данных для последующих перестановок. Во-вторых, на всех этапах преобразований используются коэффициенты $W_N = e^{-j2\pi k / N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. В простейшем случае может быть составлена таблица коэффициентов, к которым обращаются в процессе вычислений, что требует дополнительной памяти, примерно, из N ячеек. Другой способ заключается в непосредственном вычислении коэффициентов $W_N = \cos(2\pi k / N) - j \sin(2\pi k / N)$ с использованием каждый раз стандартных подпрограмм расчета косинуса и синуса, что удлиняет время вычислений. Наконец, можно применять рекуррентную формулу [7] $W_N^k = W_N^{k-L} W_N^L$ с начальным условием $W_N^0 = 1$, так как степени W на каждом этапе БПФ меняются с постоянным шагом. В-третьих, если N меньше 2^p , где p — целое число, то недостающие отсчеты дополняются нулями.

Для теоретической оценки точности программы вычисления по алгоритму БПФ, согласно [6], представим шум округления выполнения арифметических операций в виде аддитивного шумового источника с дисперсией $-\sigma_e^2$, а модель входного сигнала в виде белого шума с дисперсией $-\sigma_x^2$. При этом на каждом этапе выполнения БПФ промежуточные результаты также будут иметь вид белого шума с постоянной по всему массиву дисперсии. Выполненный в [6] анализ показыва-

ет, что отношение сигнал / шум уменьшается пропорционально количеству преобразований p с коэффициентом пропорциональности $2\sigma_e^2$. Например, в случае ЭВМ 1022 при $N = 1024$ это отношение составляет $0.95 \cdot 10^{-10}$, а при $N = 4096$ возрастает в полтора раза. Хотя в современных ЭВМ шум округления меньше, но при обработке больших массивов это свойство следует учитывать при оценке параметров составляющих квазипериодических цифровых сигналов.

Параметрический спектральный анализ подразумевает построение математической модели временного ряда $x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$ с интервалами между отсчетами Δt и последующую оценку спектральной характеристики. Наибольшее распространение получил подход [1], основанный на построении линейной стационарной модели, а анализируемый процесс рассматривается как процесс на выходе этой модели, на вход которой поступает белый шум. В [1] показано, что степень уменьшения разрешения с использованием модели авторегрессионного процесса, состоящего из смеси трех равных по мощности синусоид и белого шума, зависит от соотношения их уровней. При отношении сигнал/шум, равном 30 дБ, видны все три синусоиды. Когда отношение сигнал/шум понизилось до 10 дБ, видны только две синусоиды. При этом частоты синусоид, выраженные в долях частоты отсчетов, равны 0.15; 0.19 и 0.23.

2. Последовательный спектральный анализ

Для оценки параметров гармонических составляющих целесообразно использовать методику спектрального анализа при аппроксимации отсчетов тригонометрическим полиномом первого порядка (АТП). Дана последовательность цифровых отсчетов $x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$, в которой возможны гармонические составляющие, число которых K и частоты неизвестны, а может быть задан их ожидаемый частотный диапазон. Аппроксимируем эту последовательность тригонометрическим полиномом [4] вида:

$$y_j(n) = G_j + S_j \sin(nh_j) + C_j \cos(nh_j), \\ j = 1, 2, \dots, L \gg K, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$h_j = \frac{2\pi}{H + rj}$$

при H -начале спектрального анализа и шаге $r \ll 1$, а G_j, S_j, C_j подлежат вычислению.

По методу наименьших квадратов составляются суммы

$$\sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - y_j(n)]^2, j = 1, 2, \dots, L,$$

из условия равенства нулю частных производных которых по $G_j, S_j, C_j, j = 1, 2, \dots, L$ получим системы линейных уравнений:

$$A_{0j}G_j + A_{1j}S_j + A_{2j}C_j = E_{1j}, B_{0j}G_j + B_{1j}S_j + B_{2j}C_j = E_{2j}, \\ D_{0j}G_j + D_{1j}S_j + D_{2j}C_j = E_{3j},$$

где

$$A_{0j} = N; A_{1j} = B_{0j} = \sum_{n=0}^{N-1} \sin(nh_j),$$

$$B_{1j} = \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(nh_j); A_{2j} = D_{0j} = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(nh_j);$$

$$B_{2j} = D_{1j} = \sum_{n=0}^{N-1} \sin(nh_j) \cos(nh_j),$$

$$D_{2j} = \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(nh_j); E_{1j} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n);$$

$$E_{2j} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin(nh_j); E_{3j} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos(nh_j),$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Решение системы линейных уравнений дает:

$$S_j = (U_{2j}F_{1j} - U_{1j}F_{2j}) / W_j; C_j = (V_{1j}F_{2j} - V_{2j}F_{1j}) / W_j, \\ G_{0j} = (E_{1j} - A_{1j}S_j - A_{2j}C_j) / N$$

при

$$W_j = V_{1j}U_{2j} - V_{2j}U_{1j}; V_{1j} = B_{1j}A_{0j} - A_{1j}B_{0j},$$

$$V_{2j} = D_{1j}A_{0j} - A_{1j}D_{0j}; U_{1j} = B_{2j}A_{0j} - A_{2j}B_{0j},$$

$$U_{2j} = D_{2j}A_{0j} - A_{2j}D_{0j}; F_{1j} = E_{2j}A_{0j} - E_{1j}B_{0j},$$

$$F_{2j} = E_{3j}A_{0j} - E_{1j}D_{0j}, j = 1, 2, \dots, L.$$

По максимумам зависимости

$$M_j = \sqrt{S_j^2 + C_j^2}, j = 1, 2, \dots, L$$

отмечается наличие гармонических составляющих исследуемого процесса. Затем, при необходимости, можно определить соответствующие этим максимумам коэффициенты тригонометрического полинома.

Поскольку одновременно определяется постоянная составляющая, вычисления выполняются без предварительного запоминания массива входных данных и тем самым осуществляется обработка в режиме реального времени. Достоинством методики АТП так же является то, что в програм-

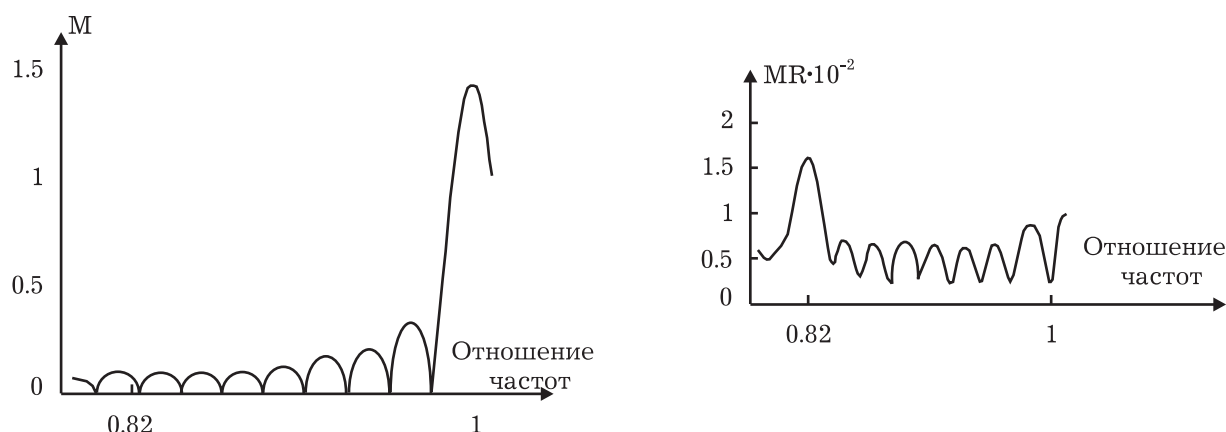


Рис. 1

ме не используются комплексные числа. В связи с постоянным повышением быстродействия ЭВМ область применения методики АТП будет расширяться. В качестве контрольного сигнала в [8] использована функция:

$$x(n) = 100 + \sin(an) + \cos(an) + \sin(an\sqrt{3}) + \cos(an\sqrt{3}) + \sin(an\sqrt{5}) + \cos(an\sqrt{5}) + R\epsilon(n),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $a = 2\pi/24$; R — амплитуда случайной составляющей ϵ с нормальным законом распределения, $N = 1024$. Значение погрешностей вычисления параметров сигнала по методике АТП для шага по частоте 0.01%, $R = 1$ по модулю не превышает 11%, а по частоте 0.05%. При вычислениях по программе алгоритма БПФ для этого сигнала при $R = 0$, после удаления постоянной составляющей, погрешность по модулю достигает 48%, а по частоте 0.16%.

С помощью методики АТП может быть решена задача [3] выявления слабых частотных составляющих при одновременном воздействии интенсивной гармонической помехи. В этом случае вычисления проводятся в два этапа. На первом этапе в заданном диапазоне частот проводится спектральный анализ и определяются параметры интенсивной гармонической составляющей (S_1, C_1, h_1) с запоминанием всего массива спектра. На втором этапе проводится повторный спектральный анализ в том же частотном диапазоне сигнала

$$Z(n) = G_1 + S_1 \sin(nh_1) + C_1 \cos(nh_1),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Затем проводится последовательное вычитание спектральных составляющих:

$$Z_{1j} = S_1 \sin(nh_j), Z_{2j} = C_1 \cos(nh_j),$$

$$W_{1j} = S_j - Z_{1j}; W_{2j} = C_j - Z_{2j}, j = 1, 2, \dots, L$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

и вычисляется зависимость $MR_j = \sqrt{W_{1j}^2 + W_{2j}^2}$ из которой оцениваются параметры слабых составляющих. Было проведено исследование сигнала при $a = 2\pi/24$.

На рис. 1 представлен исходный спектр, а на рис. 2 спектр разностного сигнала, позволяющего с погрешностью не более 20% определить модуль слабой составляющей.

Заключение

Таким образом следует критически относиться к выбору метода спектрального анализа. Так, в задаче оценки спектра эффективно используется быстрое преобразование Фурье, а в задаче определения параметров гармонических составляющих целесообразно применить методику, основанную на аппроксимации последовательности отсчетов тригонометрическим полиномом первого порядка.

Литература

1. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения /Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 584 с.
2. Двинских В.А. Вычисление параметров периодических составляющих цифровых сигналов на персональных ЭВМ // Радиотехника и электроника. — 1992. — Т. 37. — № 6. — С. 11295-11299.
3. Двинских В.А. Оценка амплитуды удвоенного периода в решениях уравнения Ресслера // Письма в ЖТФ. — 1999. — Т. 25. — Вып. 5. — С. 34-35.
4. Двинских В.А., Разумихин К.А. Вычисление спектра колебательных процессов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2002. — Т. 5. — № 4. — С. 4-7.

5. Складов Ю. А., Двинских В.А., Бричков Ю.А., Воробьев В.А., Котума А.И. Поиск осцилляций интегрального солнечного потока по наблюдениям со спутника "МЕТЕОР - 3" №7 // Письма в астрономический журнал. — 1997. — Т. 23. — № 10. — С.771-778.
6. Применение математических методов и ЭВМ. Планирование и обработка результатов эксперимента / Под редакцией А.Н. Останина. — Минск: Выш. шк., 1989. — 323 с.
7. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов /Пер. с англ. — М.: Мир, 1978. — 846 с.
8. Двинских В.А. Оценивание параметров периодических составляющих дискретных с ограниченным интервалом наблюдения //Измерительная техника. — 1999. — № 2. — С. 80-82.

Spectral Analysis of Quasi-periodical Digital Signals

V.A. Dvinskikh

The calculation of the specter is usually made in order to estimate the specter in a frequency range and to determinate the parameters of separate components of this specter. It is shown that discrete Fourier transformation has to be used only for specter estimation. In all other cases it's expedient to use the methodic based on the approximation of the chain of measurements with the trigonometrical polinome of the first degree.

Двинских Василий Александрович, 1927 года рождения. В 1951 году окончил Московский энергетический институт по специальности инженер-физик. Обучался в заочной аспирантуре при кафедре радиофизики Саратовского госуниверситета. Кандидатскую диссертацию на ученую степень кандидата физико-математических наук защитил в 1962 году. В феврале 1963 г. решением ВАК утвержден в ученом звании доцента. С 1964 по 1966 годы работал заведующим кафедрой физики в высшем командно-инженерном училище ракетных войск. С сентября 1966 г. работает на кафедре электро- и радиотехники первоначально доцентом, а в октябре 1992 г. избран по конкурсу на должность профессора. Решением государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию в 1994 году присвоено звание профессора. С января 2001 г. работает на кафедре радиотехники и электродинамики профессором. Им подготовлено восемь кандидатов наук. Регулярно повышает свою квалификацию: ФПК (Московский Госуниверситет в 1978 году), стажировки в Саратовском филиале института Радиоэлектроники Российской Академии наук. Принимает активное

участие в работе научно-технических обществ, имеет знак "Почетный Радиист СССР". В настоящее время является ученым секретарем секции "Электроника сверхвысоких частот" Головного совета по физической и квантовой электронике. Ведет научную работу по актуальной тематике. Им разработана методика, позволяющая выполнять измерения в автогенераторном режиме и обеспечивающая существенное упрощение измерительных установок с одновременной автоматизацией контроля испытующих изделий. В 1989 г. введен в действие отраслевой стандарт "Измерение параметров сверхвысокочастотных усилителей в автогенераторном режиме". С 1990 года основное внимание уделил разработке новой методики спектрального анализа, позволяющей более эффективно вычислять параметры составляющих квазипериодических колебаний. Имеет 5 авторских свидетельств и 6 патентов. Им опубликовано более 250 научных работ, издано 10 монографий и учебных пособий, сделано 15 докладов на международных конференциях.