

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 535.39

Перепутывание двух дипольно связанных атомов

Е.К. Башкиров, М.П. Ступацкая

В настоящей работе исследовано перепутывание в системе двух атомов с дипольным взаимодействием, индуцированное двухмодовым тепловым полем в идеальном резонаторе. Найдено точное аналитическое выражение для оператора эволюции рассматриваемой системы и с его помощью вычислен параметр перепутывания Переса-Хородецких. Показано, что, несмотря на деструктивный характер теплового шума, дипольное взаимодействие приводит к высокой степени атомного перепутывания.

Квантовые перепутанные состояния являются в настоящее время основой квантовых вычислений и квантовых телекоммуникаций. Для генерации перепутанных состояний в настоящее время используются различные физические системы, включая атомы и ионы в резонаторах и ловушках [1-3]. Для целей квантовой связи и квантовых вычислений нужны максимально перепутанные чистые состояния. В силу декогерентности, возникающей за счет взаимодействия с окружающей средой (шумом), появляются значительные трудности при сохранении чистых перепутанных состояний. Однако в некоторых случаях шум, напротив, может выступать в качестве источника возникновения неклассических эффектов в атомных системах, в том числе квантового перепутывания состояний атомов и поля, а также состояний отдельных атомов [4-10]. В частности С. Бозе с соавторами [4] показали, что перепутывание всегда возникает при взаимодействии произвольной системы с большим числом степеней свободы в смешанном состоянии и одиночного кубита в чистом состоянии. Общие результаты были проиллюстрированы ими на примере модели Джейнса-Каммингса одиночного атома в чистом состоянии, взаимодействующего с модой теплового поля в идеальном резонаторе. Позднее было выяснено, что тепловое поле может приводить также к перепутыванию состояний и самих двухуровневых атомов [5-10]. Диполь-дипольное взаимодействие атомных систем является естественным меха-

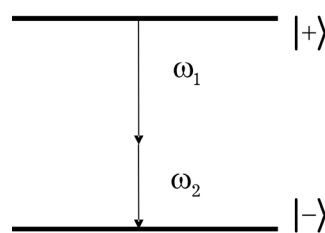


Рис. 1. Схема разрешенных переходов в двухуровневом атоме

низмом возникновения атомного перепутывания [11, [12]. Наличие диполь-дипольного взаимодействия атомов, в частности, может привести к значительному увеличению степени перепутывания двух атомов, взаимодействующих с модой теплового поля в идеальном резонаторе как посредством однофотонных переходов [13], так и вырожденных двухфотонных переходов [14]. Физически диполь-дипольное взаимодействие можно увеличить, уменьшая относительное расстояние между атомами в резонаторе. Преимущество такой схемы заключается в том, что относительное расстояние между атомами можно легко контролировать. В настоящее время в современных магнитных ловушках Пауля охлажденные атомы могут быть заперты на расстояниях порядка длины волны излучения. [1-3]. В этом случае параметр диполь-дипольного взаимодействия становится сравнимым с константой диполь-фотонного взаимодействия. В результате такие экспериментальные установки могут быть использованы для генерации значительной степени перепутывания атомов даже при наличии шума.

В настоящей работе мы исследуем влияние прямого диполь-дипольного взаимодействия между двумя двухуровневыми атомами на пе-

Е.К. Башкиров, М.П. Ступацкая

г. Самара, Самарский государственный университет

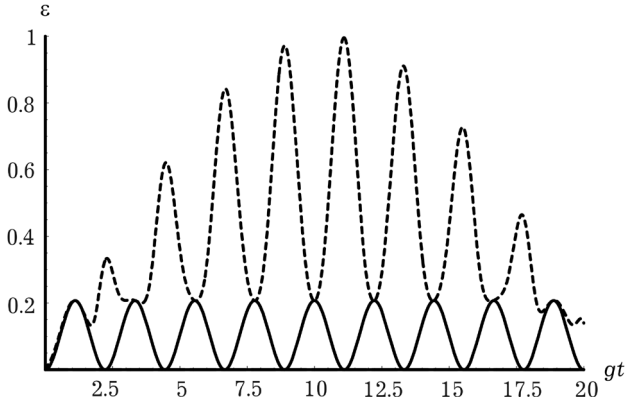


Рис. 2. Временная зависимость параметра перепутывания $\varepsilon(t)$ для вакуумного начального состояния поля с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0$ и различных значений константы диполь-дипольного взаимодействия: $\Omega/g = 0$ (сплошная линия); $\Omega/g = 0.1$ (точечная линия)

репутывание состояний этих атомов за счет невырожденного двухфотонного взаимодействия с тепловым двухмодовым полем в идеальном резонаторе. Заметим, что исследование атом-полевого перепутывания в такой модели проведено в работах [15], [16].

Рассмотрим систему двух идентичных двухуровневых атомов A и B с частотами атомных переходов ω_0 , взаимодействующих с двумя модами квантового электромагнитного поля с частотами ω_1 и ω_2 в идеальном резонаторе посредством невырожденных двухфотонных переходов. Предположим, что частоты резонаторных мод находятся в точном двухфотонном резонансе с частотами атомных переходов, т.е. имеет место условие $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ (рис. 1).

Гамильтониан рассматриваемой системы в представлении взаимодействия может быть записан в виде

$$H_I = \hbar g \sum_{j=1}^2 (a_1^+ a_2^- R_j^- + R_j^+ a_1 a_2) + \hbar \Omega (R_1^+ R_2^- + R_2^+ R_1^-). \quad (1)$$

Здесь a_i^+ и a_i — операторы рождения и уничтожения фотонов i -й моды поля ($i = 1, 2$), R_j^+ — операторы переходов в j -м двухуровневом атоме ($j = 1, 2$), g — константа невырожденного двухфотонного взаимодействия двухуровневого атома с двухмодовым полем, Ω — константа прямого диполь-дипольного взаимодействия между атомами.

Обозначим через $|+\rangle_{A(B)}$ и $|-\rangle_{A(B)}$ возбужденное и основное состояние изолированного двухуровневого атома $A(B)$. Тогда двухатомная волновая функция может быть выражена в виде комбинации волновых векторов вида $|v_1, v_2\rangle = |v_1\rangle_A |v_2\rangle_B$, где $v_1, v_2 = +, -$. Рассматриваемая система имеет

унитарную динамику, описываемую оператором эволюции $U(t) = \exp(-iHt/\hbar)$. В двухатомном базисе $|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle$ оператор эволюции $U(t)$ может быть представлен в виде

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь использованы обозначения

$$U_{11} = 1 + 2a_1 a_2 \frac{A}{\lambda} a_1^+ a_2^+,$$

$$U_{14} = 2a_1 a_2 \frac{A}{\lambda} a_1 a_2,$$

$$U_{41} = 2a_1^+ a_2^+ \frac{A}{\lambda} a_1^+ a_2^+,$$

$$U_{44} = 1 + 2a_1^+ a_2^+ \frac{A}{\lambda} a_1 a_2,$$

$$U_{12} = U_{13} = a_1 a_2 \frac{B}{\theta},$$

$$U_{21} = U_{31} = \frac{B}{\theta} a_1^+ a_2^+,$$

$$U_{24} = U_{34} = \frac{B}{\theta} a_1 a_2,$$

$$U_{42} = U_{43} = a_1^+ a_2^+ \frac{B}{\theta},$$

$$U_{22} = U_{33} =$$

$$= \frac{\exp\left[-i\frac{g}{2}(\alpha + \theta)t\right]}{4\theta} \{[1 - \exp(i g \theta t)]\alpha +$$

$$+ 2\theta \exp(i\frac{g}{2}(3\alpha + \theta)t) + \theta[1 + \exp(i g \theta t)]\},$$

$$U_{23} = U_{32} =$$

$$= \frac{\exp\left[-i\frac{g}{2}(\alpha + \theta)t\right]}{4\theta} \{[1 - \exp(i g \theta t)]\alpha -$$

$$- 2\theta \exp(i\frac{g}{2}(3\alpha + \theta)t) + \theta[1 + \exp(i g \theta t)]\},$$

где

$$A = \exp\left[-i\frac{g\alpha}{2}t\right] \times \left\{ \cos\left(\frac{g\theta}{2}t\right) + i\frac{\alpha}{\theta} \sin\left(\frac{g\theta}{2}t\right) \right\} - 1,$$

$$B = \exp\left[-i\frac{g}{2}(\alpha + \theta)t\right] [1 - \exp(i g \theta t)]$$

$$\alpha = \frac{\Omega}{g}, \quad \lambda = 2(a_1 a_2 a_1^+ a_2^+ + a_1^+ a_2^+ a_1 a_2),$$

$$\theta = \sqrt{8(a_1 a_2 a_1^+ a_2^+ + a_1^+ a_2^+ a_1 a_2) + \alpha^2}.$$

Предположим, что в начальный момент времени электромагнитное поле находится в двухмодовом тепловом состоянии

$$\rho_F(0) = \rho_{F_1}(0) \otimes \rho_{F_2}(0), \quad (3)$$

где

$$\rho_{F_i}(0) = \sum_{n_i} p_{n_i} |n_i\rangle\langle n_i|$$

и весовые коэффициенты p_{n_i} есть

$$p_{n_i} = \frac{\bar{n}_i^{n_i}}{(1 + \bar{n}_i)^{n_i+1}} \quad (i = 1, 2).$$

Здесь $\bar{n}_i$ – среднее число фотонов в i -й моде резонатора:

$$\bar{n}_i = (\exp(\hbar\omega_i/k_B T) - 1)^{-1}$$

где T – равновесная температура резонатора и k_B – постоянная Больцмана.

Рассмотрим возможность атомного перепутывания для различных начальных состояний атомной подсистемы. Для двухкубитной системы, описываемой матрицей плотности $\rho_A(t)$, в качестве меры перепутывания мы можем использовать параметр Переса-Хородецких ("negativity") [17], [18]

$$\varepsilon = -2 \sum_i \mu_i^-,$$

где μ_i^- – отрицательные собственные значения частично транспонированной (по переменным одного кубита) матрицы $\rho_A^{T_1}(t)$. Для случая $\varepsilon = 0$ состояние атомов является сепарабельным (между атомами отсутствуют квантовые корреляции), неравенство $\varepsilon > 0$ указывает на наличие атом-атомного перепутывания. Случай $\varepsilon = 1$ соответствует максимальной степени атом-атомного перепутывания. Для описания перепутывания смешанных состояний в квантовой теории информации используются и другие критерии [11], однако в случае двухкубитных систем использование критерия Переса-Хородецких является предпочтительным, поскольку условие $\varepsilon > 0$ является необходимым и достаточным условием перепутывания смешанных состояний.

Для исследования атом-атомного перепутывания с помощью параметра Переса-Хородецких нам потребуется редуцированная атомная матрица плотности. Для ее получения необходимо провести усреднение полной матрицы плотности по переменным поля

$$\rho_A(t) = \text{Tr}_F U(t) \rho(0) U^\dagger(t). \quad (4)$$

Если атомы находятся первоначально в чистом состоянии, таком как $|+, +\rangle$, $|+, -\rangle$, $|-, +\rangle$, $|-, -\rangle$ или их суперпозиции, редуцированная атомная матрица плотности с использованием

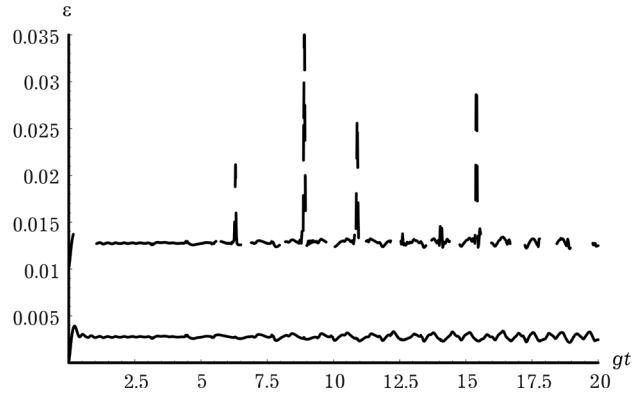


Рис. 3. Временная зависимость параметра перепутывания $\varepsilon(t)$ для интенсивного начального теплового поля $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 30$ и различных значений константы диполь-дипольного взаимодействия: $\Omega/g = 0$ (сплошная линия), $\Omega/g = 0.1$ (точечная линия). Во втором случае на графике показано временное поведение величины $\varepsilon(t) + 0.01$

формул (3), (4) может быть представлена как

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & E & 0 \\ 0 & E & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для частично транспонированной по отношению к (5) атомной матрицы плотности $\rho_A^{T_1}(t)$ есть всего одно собственное значение, которое может иметь отрицательный знак:

$$\mu_1^- = \frac{1}{2} (D + A - \sqrt{(D - A)^2 + 4 |E|^2}).$$

Собственное значение μ_1^- становится отрицательным тогда и только тогда, когда $|E| > \sqrt{AD}$. При выполнении этого условия в качестве меры атом-атомного перепутывания может быть использована величина

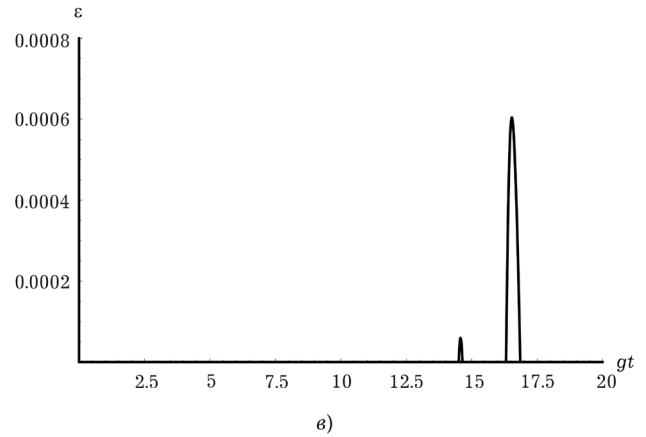
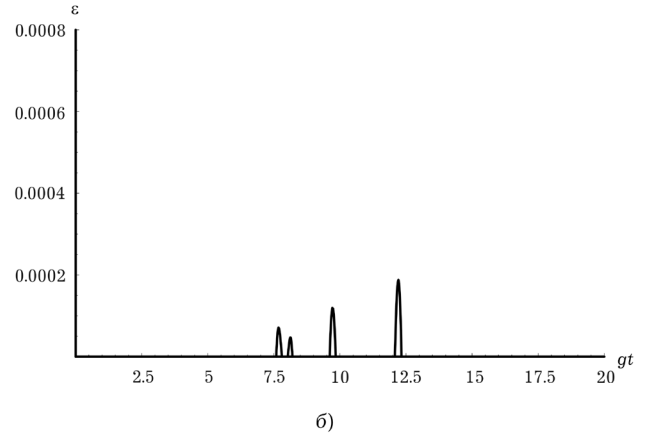
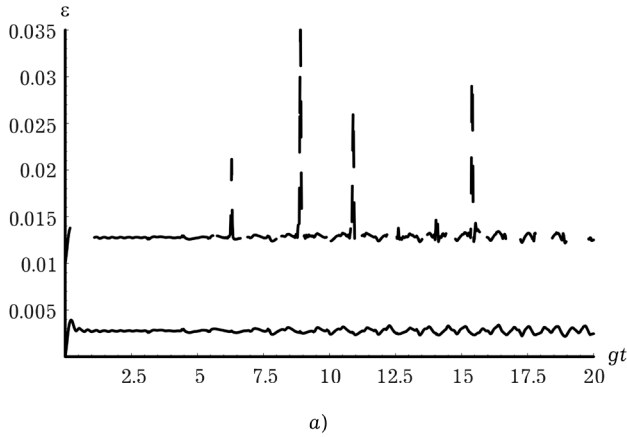
$$\varepsilon = \sqrt{(D - A)^2 + 4 |E|^2} - D - A. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь особенности атом-атомного перепутывания для различных начальных чистых состояний атомов.

1. Пусть в начальный момент времени один из атомов возбужден, а второй – в основном состоянии, т.е. атомная подсистема находится в состоянии $|+, -\rangle$. В рассматриваемом случае матричные элементы редуцированной атомной матрицы плотности (5), входящие в выражение (6), есть

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} n_1 n_2 |S_{n_1, n_2}|^2, \\ D &= \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} (n_1 + 1)(n_2 + 1) |S_{n_1, n_2}|^2, \\ E &= \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} (U_{23})_{n_1, n_2} (U_{22}^*)_{n_1, n_2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где оператор $S = \imath B/\theta$ и матричные элементы произвольного оператора O ,



действующего в пространстве полевых волновых функций, определяются обычным образом:

$$O_{n_1, n_2} = \langle n_1 | \langle n_2 | O | n_1 \rangle | n_2 \rangle.$$

Результаты численных расчетов для параметра перепутывания $\varepsilon(t)$ на основе формул (6) и (7) показаны на рис. 2-4. На рис. 2 представлена временная зависимость параметра перепутывания для вакуумного начального состояния поля (теплового состояния поля с нулевыми средними значениями фотонов в модах) и различных значений константы диполь-дипольного взаимодействия. Из рисунка хорошо видно, что диполь-дипольное взаимодействие увеличивает степень атомного перепутывания. При этом при наличии дипольного взаимодействия перепутывание возникает и в те моменты времени, когда оно отсутствовало без учета дипольной связи атомов. Такой результат не является удивительным, поскольку гамильтониан взаимодействия (1) переводит состояние $|+, -\rangle$ в максимально перепутанное состояние. Сравнивая представленные кривые с соответствующими кривыми для моделей с однофотонными [13] и вырожденными двухфотонными переходами [14], можно заметить, что кривые для всех указанных моделей достаточно похожи и отличаются лишь числом пиков. Как показывают численные расчеты, при увеличении среднего начального числа фотонов в модах числовое значение параметра перепутывания уменьшается, при этом характер зависимости степени перепутывания от константы дипольного взаимодействия остается тем же, что и для вакуумного поля, т.е. при увеличении указанной константы степень перепутывания атомов растет. На рис. 3 показаны временные зависимости параметра перепутывания $\varepsilon(t)$ для изучаемой модели в случае весьма интенсивного теплового начального состояния поля ($\bar{n}_1, \bar{n} \gg 1$)

Рис. 4. Временная зависимость $\varepsilon(t)$ параметра перепутывания $\varepsilon(t)$ для для невозбужденного начального состояния атомов и различных значений константы диполь-дипольного взаимодействия: $\Omega/g = 0$ (рис. 6 а), $\Omega/g = 0.15$ (рис. 6 б), $\Omega/g = 0.3$ (рис. 6 в). Начальные интенсивности мод теплового поля равны $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 30$

при различных значениях константы диполь-фотонного взаимодействия. Как видно из рисунка, при наличии сильной дипольной связи перепутывание в системе возможно даже для достаточно интенсивных полей.

2. Пусть в начальный момент времени оба атома находятся в основном состоянии $|-, -\rangle$. Матричные элементы, входящие в формулу (6), в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} n_1 (n_1 - 1) n_2 (n_2 - 1) |F_{n_1-1, n_2-1}|^2, \\ D &= 1 + \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} (n_1 - 1) (n_2 - 1) |F_{n_1-1, n_2-1}|^2 + \\ &+ 2 \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} \sqrt{(n_1 - 1)} \sqrt{(n_2 - 1)} \operatorname{Re} F_{n_1-1, n_2-1}, \quad (8) \\ E &= \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} n_1 n_2 |S_{n_1-1, n_2-2}|^2, \end{aligned}$$

где оператор $F = 2A/\lambda$.

Результаты численных расчетов для параметра перепутывания $\varepsilon(t)$ в рассматриваемом случае для различных значений константы диполь-фо-

тонного взаимодействия показаны на рис. 4. Величина параметра перепутывания для выбранного начального состояния значительно меньше, чем в предыдущем случае. Максимальная степень параметра перепутывания для модели с невырожденным нелинейным взаимодействием, как и в предыдущем случае, оказывается меньше, чем для однофотонного и вырожденного двухфотонного взаимодействий. При этом, в отличие от предыдущего случая, зависимость параметра $\varepsilon(t)$ от константы диполь-дипольного взаимодействия имеет немонотонный характер. Такой же характер, как показывают численные расчеты, свойствен зависимости параметра перепутывания от начальных интенсивностей. При этом перепутывание исчезает не только для больших (при высокой степени шума), но и для малых начальных значений средних чисел фотонов в модах. Последнее, очевидно, связано с тем, что в исследуемом случае оба атома находятся в основном состоянии, тогда для малых интенсивностей мод состояние поля близко к вакуумному. В этом случае поле слабо влияет на динамику атомов. В результате при $t > 0$ чистое атомное состояние почти не изменяется и перепутывания состояний атомов не возникает.

3. Пусть в начальный момент времени оба атома возбуждены, т.е. находятся в состоянии $|+, +\rangle$. Матричные элементы, входящие в формулу (6), в этом случае принимают вид

$$A = 1 + \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} (n_1 + 1)(n_2 + 1) |F_{n_1+1, n_2+1}|^2 + 2 \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} \sqrt{(n_1 + 1)} \sqrt{(n_2 + 1)} \operatorname{Re} F_{n_1+1, n_2+1}, \quad (9)$$

$$D = \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} (n_1 + 1)(n_1 + 2) \times \times (n_2 + 1)(n_2 + 2) |F_{n_1+1, n_2+1}|^2,$$

$$E = \sum_{n_1 n_2} p_{n_1} p_{n_2} (n_1 + 1)(n_2 + 1) |S_{n_1+1, n_2+2}|^2.$$

Численные расчеты на основе формул (6), (9) указывают на отсутствие атом-атомного перепутывания при любых параметрах рассматриваемой модели. Подобная же ситуация имеет место в случае однофотонного и вырожденного двухфотонного взаимодействий.

Таким образом, в настоящей работе нами исследовано атомное перепутывание в системе двух дипольно связанных двухуровневых атомов, взаимодействующих посредством двухфотонных невырожденных переходов с двухмодовым тепловым полем в идеальном резонаторе атома. Нами найдены точные выражения для оператор

а эволюции двухатомной модели. На основе полученного выражения для оператора эволюции рассчитан параметр перепутывания Переса-Хородецких для различных чистых начальных состояний атомной системы. На основе численного моделирования параметра перепутывания показана возможность атом-атомного перепутывания в модели за счет взаимодействия атомов через тепловое поле. Диполь-дипольное взаимодействие увеличивает степень атомного перепутывания, при этом из-за наличия дипольного взаимодействия перепутывание возникает и в те моменты времени, когда оно отсутствовало без учета дипольной связи атомов. Степень перепутывания за счет нелинейного двухмодового невырожденного двухфотонного взаимодействия при наличии диполь-дипольного взаимодействия меньше в сравнении с вырожденным двухфотонным и однофотонным случаями.

Литература

1. Баумейстер, Д. Физика квантовой информации. Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления / Д. Баумейстер, А. Экерт, А. Цайлингер. – М.: Постмаркет, 2002. – 376 с.
2. Experimental aspects of quantum computing / Ed. H.O. Everitt. – New York: Springer Science, 2005. – 317 p.
3. Haroche, S. Exploring the quantum. Atoms, cavities and photons / S. Haroche, J.-M. Raimond. – Oxford; New York: Oxford University Press, 2006. – 616 p.
4. Bose, S. Subsystem purity as an enforcer of entanglement / S. Bose, I. Fuentes-Guridi, P.L. Knight, V. Vedral // Physical Review Letters. – 2001. – V. 87. – P. 050401(1-4).
5. Kim, M.S. Entanglement induced by a single-mode heat environment / M.S. Kim, J. Lee, D. Ahn, P.L. Knight // Physical Review. – 2002. – V. A65. – № 65. – P. 040101(1-4).
6. Zhou, L. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement / L. Zhou, H.-S. Song // Journal of Optics. – 2002. – V. B4. – P. 425-429.
7. Zhou, L. Entanglement of two atoms through different couplings and thermal noise / L. Zhou, X.-X. Yi, H.-S. Song, Y.Q. Qu // Journal of Optics. – 2004. – V. B6. – P. 378-384.
8. Башкиров, Е.К. Перепутанные атомные состояния, индуцированные двухмодовым тепловым полем / Е.К. Башкиров // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2005. – Т. 8. – № 4. – С. 66-69.
9. Bashkirov, E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise / E.K. Bashkirov // Laser Physics Letters. – 2006. – V. 3. – № 3. – P. 145-150.

10. Башкиров, Е.К. Перепутанные состояния в системе двух неидентичных атомов, взаимодействующих с тепловым шумом / Е.К. Башкиров // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. – 2006. – № 3(43). – С. 21-29.
11. Баргатин, И.В. Запутанные квантовые состояния атомных систем / И.В. Баргатин, Б.А. Гришанин, В.Н. Задков // Успехи физических наук. – 2001. – V. 171. – №6. – С. 625-647.
12. Tanas, R. Entangling two atoms via spontaneous emission / R. Tanas, Z. Ficek // Journal of Optics. – 2004. – V. B6. – P. S90-S97.
13. Aguiar, L.S. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field / L.S. Aguiar, A. Vidiella-Barranco, J.A. Roversi // Journal of Optics. – 2005. – V. B7. – P. S769-771.
14. Liao, X-P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process / X-P. Liao, M-F. Fang, J-Wu Cai, X-J. Zheng // Chinese Physics. – 2008. – V. B17. – № 6. – P. 2137-2142.
15. Bashkirov, E.K. Dynamics of two-atom Jaynes-Cummings model with nondegenerate two-photon transitions / E.K. Bashkirov // Laser Physics. – 2006. – V. 16. – № 8. – P. 1218-1226.
16. Bashkirov, E.K. Atom-field entanglement in two-atom Jaynes-Cummings model with nondegenerate two-photon transitions / E.K. Bashkirov, M.S. Rusakova // Optics Communications. – 2008. – V. 281. – P. 4380-4386.
17. Peres, A. Separability criterion for density matrices / A. Peres // Physical Review Letters. – 1996. – V. 77. – № 8. – P. 1413-1415.
18. Horodecki, R. Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions / R. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki // Physical Letters. – 1996. – V. A223. – P. 333-339.

Entanglement of Two Dipole-Coupled Atoms

E.K. Bashkirov, M.P. Spupatskaya

In the present paper the entanglement of two atoms with dipole interaction induced by two-mode thermal field in ideal cavity has been investigated. The exact analytical formula for evolution operator of system considered has been derived. On its basis the Peres-Horodetski entanglement parameter has been calculated. It has been shown that, despite the destructive nature of thermal noise, dipole interaction leads to a high degree of atomic entanglement.



Башкиров Евгений Константинович. В 1978 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета и в 1984 году – аспирантуру при Московском государственном университете. Доктор физико-математических наук. Профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета. Автор более 150 научных работ. Область научных интересов: квантовая оптика, теория неравновесных процессов.



Ступацкая Мария Петровна. Студент V курса физического факультета Самарского государственного университета. Область научных интересов: квантовая оптика, лазерная физика, физика нелинейных явлений. Автор 3 научных работ, участник 2 международных конференций.