

## Метод тензорной функции Грина в задачах электромагнитного возбуждения

Б.А. Панченко, С.Т. Князев, С.Н. Шабунин

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина  
620002, Россия, г. Екатеринбург  
ул. Мира, 19

Рассмотрен метод тензорной (диадной) функции Грина, эффективно используемый для решения трехмерных неоднородных векторных задач электромагнитного возбуждения и дифракции. Показана связь напряженностей электрического и магнитного поля с электрическими и магнитными токами. Рассмотрены различные представления тензоров Грина для основных систем координат. Описан асимптотический переход к вычислению полей в дальней зоне при решении задач излучения антенн и дифракции. Показан способ расчета эффективной площади рассеяния и коэффициента поглощения электромагнитной энергии. Приведены примеры использования аппарата тензорных функций Грина при решении задач прикладной электродинамики.

**Ключевые слова:** электромагнитные волны, слоистые среды, функции Грина, дифракция, излучение.

### Введение

Использование тензорных представлений решения трехмерных неоднородных уравнений для электромагнитного поля можно найти в монографиях [1–3].

Уместно отметить монографию, посвященную построению и использованию тензоров Грина [4]. Обозначим также работы отечественных авторов [5–7]. Тензорный характер связи источников и электромагнитных полей вытекает из векторного характера функций. Альтернативное представление тензоров связано с использованием решений векторных уравнений Гельмгольца и выбора оси системы координат, относительно которой записывается характеристическая часть функций Грина [7].

### 1. Связь электромагнитных полей и источников. Условие симметрии

Тензоры Грина – это билинейные функционалы, которые устанавливают линейные связи между напряженностями электрического  $\vec{E}(\vec{r})$  и магнитного  $\vec{H}(\vec{r})$  поля и объемными плотностями электрического  $\vec{j}^{\Delta}(\vec{r}')$  и магнитного  $\vec{j}^M(\vec{r}')$  токов:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \int_{V'} [\bar{\bar{\Gamma}}_{11}(\vec{r}; \vec{r}') \vec{j}^{\Delta}(\vec{r}') + \bar{\bar{\Gamma}}_{12}(\vec{r}; \vec{r}') \vec{j}^M(\vec{r}')] dv, \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \int_{V'} [\bar{\bar{\Gamma}}_{21}(\vec{r}; \vec{r}') \vec{j}^{\Delta}(\vec{r}') + \bar{\bar{\Gamma}}_{22}(\vec{r}; \vec{r}') \vec{j}^M(\vec{r}')] dv,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $V'$  – объем распределения сторонних токов.

Числовые индексы  $i, j$  в тензорах  $\bar{\bar{\Gamma}}_{ij}(\vec{r}; \vec{r}')$  означают для 1 принадлежность к электрическим величинам, 2 – к магнитным величинам.

В трехмерной ортогональной системе координат каждый тензор содержит 9 скалярных компонентов, которые сопровождаются диадными произведениями единичных векторов. Например,  $\Gamma_{12;xy}$  определяет  $x$ -компоненту напряженности электрического поля, обусловленную  $y$ -компонентной магнитного тока.

Размерности тензоров:  $\bar{\bar{\Gamma}}_{11}(\vec{r}; \vec{r}') - \text{Ом}/\text{м}^2$ ,  $\bar{\bar{\Gamma}}_{21}(\vec{r}; \vec{r}') - 1/\text{м}^2$ ,  $\bar{\bar{\Gamma}}_{12}(\vec{r}; \vec{r}') - 1/\text{м}^2$ ,  $\bar{\bar{\Gamma}}_{22}(\vec{r}; \vec{r}') - 1/(\text{Ом} \cdot \text{м}^2)$ . Общее количество скалярных компонентов в (1)  $9 \times 4 = 36$ . Уравнения Максвелла позволяют установить следующие соотношения симметрии между тензорами:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\Gamma}}_{11}(\vec{r}; \vec{r}') &= \tilde{\bar{\bar{\Gamma}}}_{11}(\vec{r}; \vec{r}'), \quad \bar{\bar{\Gamma}}_{22}(\vec{r}; \vec{r}') = \tilde{\bar{\bar{\Gamma}}}_{22}(\vec{r}; \vec{r}'), \\ \bar{\bar{\Gamma}}_{12}(\vec{r}; \vec{r}') &= -\tilde{\bar{\bar{\Gamma}}}_{21}(\vec{r}; \vec{r}'),\end{aligned}\quad (2)$$

где знак « $\sim$ » означает операцию транспонирования тензора.

### 2. Альтернативные представления тензоров

Возможно несколько способов записи тензоров Грина. Во-первых, разложение трехмерной функции Грина с использованием векторных собственных функций  $\vec{M}, \vec{N}, \vec{L}$  или по системе только поперечных функций [2]. Во-вторых,

разложение по волнам  $\vec{M}$  и  $\vec{N}$  в поперечном сечении структуры  $S$ ; поля вдоль третьей координаты связаны с решением дифференциального уравнения методом Даламбера. Ось, вдоль которой «бегут» или «стоят» волны типа  $E$  (разложение по системе функций  $\vec{M}$ ) или волны типа  $H$  (разложение по системе функций  $\vec{N}$ ), связана с характеристической частью функции Грина. При анализе цилиндрических волноводов и резонаторов в качестве продольной оси выбирается ось  $Oz$  (цилиндрическая система координат). При анализе сферических структур выбирается радиальная ось  $Or$ . При построении системы функций  $\vec{M}$ ,  $\vec{N}$  используется разложение Фурье. Упомянем в связи с этим развитый аппарат определения и нормировки собственных функций для широкого класса поперечных сечений [8]. Распределение поля вдоль продольной оси строится на основе решения дифференциального уравнения второго порядка методом Даламбера [2]. Продольная часть функции Грина называется *характеристической*. Характеристическая часть для волн типа  $E$  и  $H$  в свободном пространстве имеет одинаковую запись.

Для внешних задач выбор оси, относительно которой строится характеристическая часть тензоров, не является однозначным, например, для открытых цилиндрических структур «бегущие волны» можно строить по любой из осей  $\rho$ ,  $\phi$  или  $z$ .

### 3. Тензоры Грина для стратифицированных структур

В радиоэлектронике широкое применение находят слоистые диэлектрики (полосковые линии, печатные антенны, обтекатели, оптоволоконные линии и др.). При проектировании устройств используется моделирование слоистых сред. Если стратификация областей с электромагнитными полями происходит по координатным линиям выбранной системы, то возможна универсальная запись тензоров Грина [7]. Информация о размерах, количестве слоев, электрофизических характеристиках включается только в характеристические части функций. Например, для характеристической части волны типа  $E$ , ориентированной вдоль оси  $Oz$ , запись имеет вид

$$g(z, z') = \frac{\vec{I}_p(z < z_p) \vec{I}_{q-1}(z < z_{q-1})}{j\omega \epsilon_p \vec{Z}(z_p)} \prod_{l=p+1}^{q-1} T_l^E, \quad (3)$$

где  $\vec{I}_p$ ,  $\vec{I}_{q-1}$  – ориентированные токи в эквивалентной линии для волн типа  $E$ ;  $\vec{Z}(z_p)$  – ори-

ентированные импедансы налево и направо от сечения отсчета  $z_p$ ;  $p$  – область, где находятся точки наблюдения;  $q-1$  – область, где находятся точки источника;  $T_l^E$  – модальные коэффициенты передачи между слоями.

Выражение типа (3) пригодно для решения как внутренних, так и внешних задач возбуждения. В последнем случае функции  $g(z, z')$  содержат особые точки и определяют спектр пространственных и поверхностных волн, возбуждаемых в структуре. Аналогично (3) записывается характеристическая часть для волн типа  $H$ . Наличие особых точек на плоскости комплексного переменного создает некоторые трудности при численных расчетах. Эти сложности можно обойти, используя альтернативные представления тензоров Грина. За ось, связанную с характеристическими частями функции Грина, выбирается не продольная ось стратифицированной структуры, а поперечная. При этом поперечное сечение становится неоднородным. Разложение электромагнитного поля производится по смешанному спектру волн: непрерывный спектр связан с пространственными волнами; дискретный – с поверхностными, которые могут распространяться вдоль структуры. При таком подходе сложность заключается в записи собственных ортонормированных волн типа  $LE$ ,  $LM$ . Эта работа проведена по методике [8]. Результаты для нескольких типов стратифицированных структур можно найти в [6], [7] и [9].

### 4. Особенности построения тензоров Грина для неоднородных цилиндрических структур

Вследствие особенностей цилиндрических многослойных сред при записи выражений для компонентов поля не удается разделить вклад произвольно ориентированных сторонних электрических и магнитных токов подобно плоским и сферическим структурам и иметь компактную запись решения, аналогичную (1). Например, радиальный сторонний электрический ток порождает продольные относительно оси  $Oz$  составляющие как электрического, так и магнитного поля. Разложение электромагнитного поля проводится по спектру радиально распространяющихся электрических и магнитных волн относительно продольной оси. Решение задачи электромагнитного возбуждения радиально слоистых сред методологически аналогично рассмотренным ранее случаям. Вновь используются ориентированные

напряжения и токи, а также импедансы и адмитансы эквивалентных радиальных линий. Задача сводится к цепной модели [7]. Взаимодействие между эквивалентными линиями учитывается введением дополнительных матриц – матриц передачи границ слоев. В рамках предложенного метода внешние граничные условия моделируются с помощью концевых комплексных соотношений и проводимостей. Связь компонентов поля между внутренними границами одного слоя рассчитывается с помощью матрицы передачи слоя. Использование матриц при описании характеристик слоистых сред позволяет создать универсальный аппарат решения задач возбуждения, излучения и дифракции волн в радиально неоднородных средах.

Возможна запись альтернативного представления тензоров Грина для неоднородных цилиндрических систем при разложении электромагнитного поля по спектру продольно распространяющихся волн типа  $E$  и типа  $H$  относительно продольной оси.

## 5. Поля в дальней зоне.

### Антенные задачи

При решении внешних задач используется спектральное представление тензоров Грина. Разложение ведется по непрерывному спектру волновых чисел  $\xi, \eta$  [10]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [...] d\xi d\eta. \quad (4)$$

Поле в дальней зоне может быть вычислено методом перевала при асимптотическом представлении подынтегральных выражений в (4). Эту работу можно свести к некоторым стандартным процедурам, используя в тензорах Грина замены:

$$\xi = k_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad \eta = k_0 \sin \theta \cos \varphi,$$

где  $\theta, \varphi$  – координаты сферической системы.

Для составляющих поверхностных сторонних токов  $J_l(x, y)$  вводятся преобразования Фурье

$$\tilde{k}_l = k_0 \int_S J_l(x, y) e^{j\xi x + j\eta y} ds$$

и определяются характеристические части функций Грина в системе пространственных угловых координат:

$$F^\Theta(z, z'; \theta, \varphi) \sim j\omega \mu f(z, z'; \xi, \eta),$$

$$G^\Theta(z, z'; \theta, \varphi) \sim \frac{j\omega \varepsilon}{k_0^2} \frac{\partial^2 g(z, z'; \xi, \eta)}{\partial z \partial z'},$$

$$F^M(z, z'; \theta, \varphi) \sim \frac{j\omega \varepsilon}{k_0^2} \frac{\partial^2 f(z, z'; \xi, \eta)}{\partial z \partial z'},$$

$$G^M(z, z'; \theta, \varphi) \sim j\omega \mu g(z, z'; \xi, \eta).$$

Далее, комбинируя  $\tilde{k}_l, G^\Theta, G^M, F^\Theta, F^M$ , определяются составляющие поля в сферической системе координат  $E_\theta(\theta, \varphi), E_\varphi(\theta, \varphi)$  в дальней зоне [11].

## 6. Связь функционалов электродинамики с тензорами Грина

Исходная задача электромагнитного возбуждения формулируется в форме интегрального уравнения, например:

$$\int_{V'} \bar{\Gamma}_{11}(\vec{r}; \vec{r}') \vec{j}^\Theta(\vec{r}') dv = \vec{E}_{\text{ст}}(\vec{r}), \quad (5)$$

где  $\vec{E}_{\text{ст}}(\vec{r})$  – напряженность стороннего поля.

Вследствие сложности ядра в (5) регулярные методы решения уравнения неприемлемы. Для решения используются прямые (вариационные) методы. Реализация методов связана с вычислением частичных сопротивлений или проводимостей:

$$Z_{pq} = \int_V \int_{V'} \vec{j}_p^\Theta(\vec{r}) \bar{\Gamma}_{11}(\vec{r}; \vec{r}') \vec{j}_q^\Theta(\vec{r}') dv' dv,$$

$$Y_{pq} = \int_V \int_{V'} \vec{j}_p^M(\vec{r}) \bar{\Gamma}_{12}(\vec{r}; \vec{r}') \vec{j}_q^M(\vec{r}') dv' dv,$$

где  $\vec{j}_p^{\Theta, M}(\vec{r}), \vec{j}_q^{\Theta, M}(\vec{r}')$  – пробные функции.

## 7. Задачи электромагнитной дифракции. Выделение рассеянной части поля. Энергетические характеристики

Задачи дифракции (рассеяния) являются частным случаем электромагнитного возбуждения, когда сторонние токи относятся на бесконечность. Тип источника определяет форму фронта волны и поляризацию.

Основной интерес при решении дифракционных задач представляет рассеянная часть поля. Она получается путем вычитания из общего решения задачи возбуждения стороннего поля. Это вычитание производится только в характеристических частях соответствующих функций Грина. При этом формально падающее поле разлагается по той же системе функций, что и общее решение. В этом случае вычитание производится почленно для каждой моды  $n$ . Например,

$$g_n^S = g_n(r, r') - g_n^i(r, r') \Big|_{r, r' \rightarrow \infty},$$

где  $g_n^i(r, r')$  – характеристическая часть функции Грина для падающего поля.

Решение задачи в цилиндрической системе координат имеет свои особенности. Рассеянное поле рассчитывается при вычитании из суммарного поля первичного. Первичное поле аналитически выделяется из суммарного методом предельного перехода к пространству без рассеивателя.

Основная энергетическая характеристика рассеяния – ЭПР определяется рассеянной частью поля

$$\text{ЭПР} = \frac{\int |\Pi_S(\theta, \varphi)| ds}{|\Pi_i|},$$

где  $|\Pi_S(\theta, \varphi)|$  – модуль вектора Пойнтинга рассеянного поля;  $|\Pi_i|$  – модуль вектора Пойнтинга падающего поля.

Для определения коэффициента поглощения рассеивателя можно использовать оптическую теорему [12]

$$\sigma_S = \frac{1}{Z_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ |E_\theta^S(\theta, \varphi)|^2 + |E_\varphi^S(\theta, \varphi)|^2 \right] \times \\ \times r^2 \sin \theta d\theta d\varphi / S_0 |\Pi_i| \Big|_{r \rightarrow \infty},$$

где  $E_\theta^S, E_\varphi^S$  – компоненты рассеянного поля;  $S_0$  – площадь проекции рассеивателя на фронт падающей волны;  $Z_0 = 120\pi$  Ом.

## 8. Примеры использования тензоров Грина

В качестве иллюстрации подходов к решению задач электромагнитного возбуждения рассмотрим два «учебных» примера, которые приводят, тем не менее, к нетривиальным результатам.

### Пример 1

Определение полного «комплексного» сопротивления элементарного электрического вибратора длиной  $l \ll \lambda$  и радиусом провода  $\eta_0$ .

Задача решается в сферической системе координат. Ток на вибраторе задается следующим образом:

$$\vec{j}^\partial(\vec{r}') = \frac{Il}{(r')^2 \sin \theta'} \delta(r' - \eta_0) \delta(\theta' - 0) \vec{a}_r.$$

Для определения полного сопротивления используется метод реакции [3]

$$Z = -\frac{1}{I^2} \int_V \int_V \vec{j}^\partial(\vec{r}) \bar{\bar{G}}_{11}(\vec{r}; \vec{r}') \vec{j}^\partial(\vec{r}') dv' dv.$$

С учетом размеров антенны в представлении тензора  $\bar{\bar{G}}_{11}(\vec{r}; \vec{r}')$  использована первая сферическая гармоника и длинноволновая аппроксимация функций Бесселя – Риккати, входящих в  $\bar{\bar{G}}_{11}$ . В результате получим:

$$Z = 20 (k_0 l)^2 \left\langle \left[ 1 + \frac{1}{4} (k_0 \eta_0)^2 \right] - \right. \\ \left. - j \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{(k_0 \eta_0)^3} - \frac{1}{(k_0 \eta_0)} \right] \right\rangle = R + jX. \quad (6)$$

При  $\eta_0 \rightarrow 0$ ,  $R \approx 20 (k_0 l)^2$ ,  $X \rightarrow \infty$ .

Формула (6) является обобщением известной формулы Родригеса [13], которая получена путем интегрирования нескольких компонентов вектора Пойнтинга в ближней зоне при традиционном представлении функции Грина в виде  $e^{-jk_0 r}/r$ .

### Пример 2

Сопrotивление круговой рамки радиусом  $\eta_0 \ll \lambda$  с двумя законами распределения излучающего тока вдоль кольца:

- сопротивление рамки с постоянным распределением электрического тока

$$Z = 2\pi^2 (k_0 \eta_0)^4 \left[ 1 + j \frac{3}{(k_0 \eta_0)^3} \right], \text{ Ом};$$

- сопротивление рамки с первой азимутальной вариацией электрического тока

$$Z = 2\pi^2 (k_0 \eta_0) \left[ 1 - j \frac{3}{2} \frac{1}{(k_0 \eta_0)^3} \right], \text{ Ом}. \quad (7)$$

Сопrotивление (7) эквивалентно излучению двух синфазных изогнутых электрических вибраторов: активная часть пропорциональна первой степени линейного размера, реактивная часть носит емкостной характер и резко возрастает с уменьшением размеров рамки.

## Список литературы

1. Borgnis F.E., Rapas C.H. Randwertprobleme der Mikrowellenphysik. Berlin: Springer, 1955. 101 p.
2. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.2. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 942 с.
3. Harrington R.F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields. NY: McGraw-Hill College, 1961.
4. Tai C.T. Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory / 2nd edition. New Jersey: IEEE Press, Piscataway, 1994. 343 p.
5. Марков Г.Т., Панченко Б.А. Тензорные функции Грина прямоугольных волноводов и резонаторов // Известия вузов. Радиотехника. 1964. Т. 7. № 1. С. 34–41.

- 
- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>6. Панченко Б.А., Нефедов Е.И. Микрополосковые антенны. М.: Радио и связь, 1986. 144 с.</p> <p>7. Электродинамический расчет характеристик излучения полосковых антенн / Б.А. Панченко [и др.]. М.: Радио и связь, 2002. 256 с.</p> <p>8. Титчмарш Э. Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 556 с.</p> <p>9. Фелсен Л. Излучение и рассеяние волн / под ред. М.И. Левина; пер. с англ. М.: Мир, 1978. Т. 1. 546 с. Т. 2. 550 с.</p> | <p>10. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1967. 376 с.</p> <p>11. Панченко Б.А. Определение полей излучения в многослойных диэлектрических структурах // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1987. № 7. С. 92.</p> <p>12. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 713 с.</p> <p>13. Balanis C.A. Antenna Theory / 3rd edition. N.-Y.: Wiley-Interscience, 2005. 1117 с.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
- 

## The method of dyadic Green's function for problems of electromagnetic excitation

*B.A. Panchenko, S.T. Knyazev, S.N. Shabunin*

The method of dyadic Green's functions effectively used for electromagnetic excitation of three-dimensional non-uniform structures is considered. Connection between electric and magnetic field components and electric and magnetic currents is shown. Various representations of dyadic Green's functions for basic coordinate systems are considered. Asymptotic calculation of electromagnetic fields in a far zone for antenna and scattering problems is described. The calculation method of a scattering cross-section and absorption factor is shown. Examples of Green's functions using for several electromagnetic problems are considered.

*Keywords:* electromagnetic waves, layered structures, Green's functions, scattering, radiation.

---