

Акустический импеданс приемной пьезопластины, имеющей электрическую нагрузку, и его применение для расчетов

В.С. Кононенко, В.В. Савичев, В.Е. Тиранин

Широкое применение акустических (пьезоэлектрических) кристаллов в различных устройствах акустоэлектроники требовало знания в первую очередь электрического импеданса пьезопреобразователя, являющегося элементом радиотехнической схемы. Решение задач, связанных с проблемами ультразвуковых измерений, требует знания не только электрического, но и акустического импеданса пьезопластины, что необходимо в первую очередь для анализа влияния электрической нагрузки на рабочие параметры приемной пьезопластины, на отражение акустического импульса, падающего со стороны среды на пьезопластину.

Введение

Широкое применение акустических (пьезоэлектрических) кристаллов в различных устройствах акустоэлектроники требовало знания в первую очередь электрического импеданса пьезопреобразователя, являющегося элементом радиотехнической схемы. Решение задач, связанных с проблемами ультразвуковых измерений, требует знания не только электрического, но и акустического импеданса пьезопластины, что необходимо в первую очередь для анализа влияния электрической нагрузки на рабочие параметры приемной пьезопластины, на отражение акустического импульса, падающего со стороны среды на пьезопластину.

1. Акустический импеданс приемной пьезопластины, имеющей электрическую нагрузку

Рассмотрим пьезоэлектрический преобразователь в виде пластины толщиной b , на которую вдоль оси z падает плоская продольная волна. Ось z выберем так, чтобы плоские поверхности пьезопластин удовлетворяли условиям: $z = b/2$ и $z = -b/2$. Ограничимся случаями, когда размеры пластины намного больше ее толщины. В уравнениях, описывающих явления пьезоэффекта, для их упрощения в качестве не-

зависимых переменных целесообразно выбрать величины D и s [2] и представить уравнения в следующем виде:

$$T = c^D s - hD, \quad (1)$$

$$E = -hs + \beta^s D, \quad (2)$$

где T - величина механического напряжения вдоль оси z ; u - смещение частиц вдоль оси z , $s = \partial u / \partial z$; c^D - модуль упругости при постоянной электрической индукции D ; h - пьезоэлектрическая постоянная; $\beta^s = 1 / \epsilon^s \epsilon_0$ - обратная диэлектрическая проницаемость среды при постоянной деформации [2]; $E = D\beta^s$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Решение волнового уравнения для амплитуды колебательной скорости $v = \partial u / \partial t$ в рассматриваемом одномерном случае ищем в виде

$$v = A \exp(-ikz) + B \exp(ikz), \quad (3)$$

где k - волновое число материала пьезопластины вдоль оси z ; A и B - амплитуды волн. Пусть воздействия на поверхности пьезопластин площадью S определяются силами

$$\begin{aligned} F_1 &= -T_1 S \text{ при } z = -\frac{b}{2} \text{ и} \\ F_2 &= -T_2 S \text{ при } z = \frac{b}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

а соответствующие им компоненты амплитуды колебательной скорости

$$v_1 = v \left(-\frac{b}{2} \right) \text{ и } v_2 = v \left(\frac{b}{2} \right). \quad (5)$$

Применив граничные условия (5) для выражения (3), получим

$$v = \left\{ -v_2 \sin \left[k \left(z + \frac{b}{2} \right) \right] + \right. \quad (6)$$

В.С. Кононенко, В.В. Савичев

г. Самара, Самарская государственная академия путей сообщения

В.Е. Тиранин

г. Самара, Самарский государственный архитектурно-строительный университет

$$+v_1 \sin \left[k \left(\frac{b}{2} - z \right) \right] \Bigg\} \sin^{-1} kb.$$

Подставив полученное выражение для v в равенства (4) и (5) с учетом известных соотношений [1]

$$\partial v / \partial z = i\omega S, I = i\omega SD, U = - \int_{-b/2}^{b/2} Edz,$$

получим важнейшие уравнения [1,2], необходимые для дальнейшего анализа:

$$F_1 = -i \left(Z_c \operatorname{ctg} kb v_1 + Z_c \sin^{-1} kb v_2 + \frac{Ih}{\omega} \right), \quad (7)$$

$$F_2 = -i \left(Z_c \sin^{-1} kb v_1 + Z_c \operatorname{ctg} kb v_2 + \frac{Ih}{\omega} \right), \quad (8)$$

$$U = -i \left(\frac{v_1 h}{\omega} + \frac{v_2 h}{\omega} + \frac{I}{\omega C_0} \right), \quad (9)$$

где $C_0 = \varepsilon^s \varepsilon_0 S / b$ - емкость пьезопластины при деформации s равной 0; $Z_c = \rho_1 c_1 S$, c_1 - скорость продольных волн в пьезопластине в направлении оси z ; ρ_1 - плотность пьезопластины; I - ток через пьезопластину; U - напряжение на ней; ω - круговая частота. Акустический импеданс для поверхности пьезопластины, граничащей со средой 1, будет равен $Z_1 = F_1 / v_1$ и для поверхности, нагруженной на среду 2, равен $Z_2 = F_2 / v_2$. В отличие от работ [1,2], где рассматривается электрическое возбуждение пьезопластины, при акустическом возбуждении импедансы Z_1 и Z_2 должны быть записаны со знаком плюс, в противном случае выражение для акустического импеданса при $h = 0$ не будет соответствовать стандартному [1]. За счет пьезоэффекта на металлизированных поверхностях пьезопластины возникает напряжение U . Если металлизированные поверхности пьезопластин соединить с электрической нагрузкой Z_{el} , то по закону Ома ток через нагрузку будет равен $I = -U / Z_{el}$, где знак "минус" учитывает, что ток при акустическом возбуждении имеет противоположное направление по отношению к направлению тока в пьезопластине, возбуждаемой переменным напряжением и рассматриваемой в работах [1, 2]. Подставив F_1 , F_2 и U в выражения (7), (8) и (9), получим систему трех однородных уравнений с тремя неизвестными v_1 , v_2 и I :

$$(Z \operatorname{ctg} kb - iZ_1)v_1 + Z \sin^{-1} kb v_2 + \frac{Ih}{\omega} = 0,$$

$$Z \sin^{-1} kb v_1 + (Z \operatorname{ctg} kb - iZ_1)v_2 + \frac{Ih}{\omega} = 0, \quad (10)$$

$$\left(\frac{h}{\omega} \right) v_1 + \left(\frac{h}{\omega} \right) v_2 + I(X_c + iZ_{el}) = 0,$$

где $Z = \rho_1 c_1 S$; $X_c = 1 / \omega C_0$ есть модуль емкостного сопротивления зажатой пьезопластины; c_1 - скорость ультразвука в пьезопластине; ρ_1 - ее плотность. Пусть вторая сторона пьезопластины граничит со средой, имеющей плотность ρ_2 и скорость ультразвука c_2 . Тогда импеданс для этой стороны пьезопластины должен иметь вид $Z_2 = \rho_2 c_2 S$. Система уравнений (10) имеет решение, отличное от нулевого, когда детерминант, составленный из его коэффициентов, равен нулю. Это условие позволяет получить следующее выражение для акустического импеданса приемной пьезопластины:

$$Z_1 = iZ \frac{[2\varepsilon \operatorname{tg} kb / 2 - 1 + i\gamma(\operatorname{ctg} kb - \varepsilon)]}{\varepsilon - \operatorname{ctg} kb - i\gamma}, \quad (11)$$

где $\varepsilon = \xi / (1 + ix)$; $\xi = h^2 / (\omega^2 X_c Z) = k_t^2 / kb$; k_t - коэффициент электромеханической связи; $x = Z_{el} / X_c$, Z_{el} - комплексное сопротивление электрической нагрузки пьезопластины; $X_c = 1 / \omega C_0$; $\gamma = \rho_2 c_2 / \rho_1 c_1$ есть отношение акустических импедансов среды и материала пьезопластины.

Если вторая сторона пьезопластины акустически ненагружена ($\gamma = 0$), что является наиболее частым случаем, то выражение (11) для акустического импеданса пьезопластины примет вид

$$Z_1 = iZ \frac{2\varepsilon \operatorname{tg} kb / 2 - 1}{\varepsilon - \operatorname{ctg} kb} = iZ u. \quad (12)$$

В общем случае, согласно теории электрических цепей, произвольную электрическую нагрузку пьезопластины можно всегда представить в виде последовательно соединенных активной и реактивной нагрузок и записать в виде $Z_{el} = R + iZ_\gamma$. Легко видеть, что при наличии активной нагрузки R величина ε будет комплексной и только для чисто реактивной нагрузки - действительной. Акустический импеданс пьезопластины при отсутствии электрической нагрузки определяется выражением [3]

$$Z_{ac} = iZ \operatorname{tg} kb \quad (13)$$

и может быть получен из формулы (12) при условии $\varepsilon = 0$. Выражение (12) нетрудно преобразовать к следующему виду: $Z_1 = Z_{ac} + Z_{el}$, где

$$Z_{el} = iZ \frac{2\varepsilon \operatorname{tg} kb / 2 - \operatorname{tg} kb}{\varepsilon - \operatorname{ctg} kb}. \quad (14)$$

Из вышеизложенного следует, что акустический импеданс пьезопластины с электрической нагрузкой складывается из ее собственного

импеданса и импеданса, вносимого электрической нагрузкой Z_{el} . Дальнейший анализ влияния электрической нагрузки на акустические потери пьезопластины и ее эффективную частоту проведем для каждого случая нагрузки отдельно.

2. Влияние активной электрической нагрузки на добротность приемной пьезопластины

Результаты, полученные в разделе 1, можно использовать для анализа влияния внешней электрической нагрузки на рабочие параметры приемной пьезопластины. Пусть пьезопластина граничит лишь со средой 1, со стороны которой на нее падает ультразвуковая волна, возбуждающая в ней колебания, т. е. среда 1 нужна лишь для возбуждения колебаний и на процесс колебаний пьезопластины не оказывает влияния. Как было показано выше, при чисто реактивной электрической нагрузке пьезопластины величина Z_{el} является чисто мнимой и поэтому не приводит к потерям энергии колебаний. Наличие активной составляющей сопротивления в электрической нагрузке пьезопластины должно неизбежно приводить к дополнительной диссипации энергии при колебаниях пьезопластины. Для оценки этого влияния приравняем акустический импеданс пьезопластины с электрической нагрузкой Z_1 (формула 12) к акустическому импедансу эквивалентной ей свободной пьезопластины Z_{ac} (формула 13), имеющей такие же по величине собственные потери (например, потери за счет поглощения ультразвука в ней), получим

$$tg\tilde{k}_0 b = u, \quad (15)$$

где $\tilde{k}_0 = k_0 + i\alpha$, k_0 - эквивалентное значение волнового числа для пьезопластины без электрической нагрузки,

$$u = \frac{2\xi tgkb / 2 - 1 - ix}{\xi - ctgkb - ixctgkb}, \quad (16)$$

α - эквивалентный коэффициент поглощения в свободной пьезопластине, определяемый активными потерями в электрической цепи. Величина x определяется комментариями к формуле (11) и равна отношению импеданса электрической нагрузки внешней цепи к модулю емкостного импеданса пьезопластины.

Используя формулу Эйлера, представим равенство (15) в виде

$$\exp(2\alpha b)\exp(2ik_0 b) = \frac{1 + iu}{1 - iu} = A. \quad (17)$$

Из равенства (17) получим

$$\alpha = \frac{\ln|A|}{2b}. \quad (18)$$

Учитывая, что добротность колебаний пьезопластины Q определяется соотношением $Q^{-1} = \alpha\lambda / \pi$, и используя формулы (16), (17) и (18), получим $Q^{-1} = 2\xi x\delta / [kb(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]$, где $\zeta_1 = 1 + tgkb(x - \xi)$, $\zeta_2 = x + [2\xi tg(kb/2) - 1]tgkb$, $\delta = tg^2(kb/2)tg^2 kb$, Q - добротность, которую имела бы пьезопластина только за счет потерь на активной нагрузке. Пренебрегая малыми членами, содержащими ξ , для резонансных частот пьезопластины ($kb = \pi n$) получим выражение

$$Q^{-1} = \frac{2k_t^2}{(kb)^2} \left[\frac{x}{x^2 + 1} \right], \quad (19)$$

где x - отношение активной нагрузки к модулю емкостного сопротивления пьезопластины. Точная формула с учетом параметра ξ позволяет получить значения Q , аналогичные результатам расчета по формуле (19). Из данной формулы видно, что минимальное влияние электрической нагрузки на потери пьезопластины получается при активной нагрузке, равной нулю (короткое замыкание пьезоэлемента, $x = 0$), или активной нагрузке, во много раз превышающей по величине модуль собственного емкостного сопротивления пьезопластины ($x \gg 1$).

Рассмотрим первую резонансную гармонику пьезопластины ($kb = \pi$). Для ниобата лития положим $k_t^2 = 0,24$. Результаты расчета по формуле (19) показаны в таблице 1. Как следует из формулы (19) при $x = 0$ или $x = \infty$ добротность $Q = \infty$.

Максимальные потери энергии наблюдаются при экстремальном значении $x = 1$, т. е. при равенстве активного сопротивления внешней нагрузки пьезопластины и модуля емкостного сопротивления пьезопластины. Из таблицы 1 следует, что влияние сопротивления на добротность достаточно велико. Даже при $x = 100$ значение $Q = 490$. Следовательно, наличие внешней активной нагрузки при резонансе может значительно снизить собственную добротность пьезопластины. Влияние этого эффекта для некоторых акустических устройств, например, для ультразвуковых резонаторов было обнаружено экспериментально, существенно влияет на измерения поглощения и будет рассмотрено в последующих публикациях. Следует заметить, что для пьезокварцевой пластины из-за малости величины ξ это влияние на порядок меньше.

С увеличением номера n резонансной гармоники пьезопластины рассмотренные потери значительно уменьшаются. Добротность пьезопластины $Q \sim n^2$ и при $n = 9$ увеличится в 81 раз.

Из изложенного следует, что для минимизации потерь энергии приемной пьезопластины активное сопротивление нагрузки следует выбирать во много раз большим или меньшим, чем величина модуля емкостного сопротивления пьезопластины.

3. Влияние активного сопротивления на резонансную частоту приемной пьезопластины

При работе с акустическими измерительными системами неизбежным является подключение к пьезопреобразователям активной нагрузки, которая влияет на их резонансные параметры. Для оценки этого влияния воспользуемся формулами (15), (16) и (17), из которых получим

$$\operatorname{tg}(2\tilde{k}_0 b) = \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A}, \quad (20)$$

где $\tilde{k}_0$ – эквивалентное значение волнового числа для свободной пьезопластины. С учетом равенств (16) и (17) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A = & [4\xi \operatorname{tg}(kb/2)(\xi - \operatorname{ctg} kb) - \\ & - 2\xi + 2\operatorname{ctg} kb(1 + x^2)] / \\ & / \{(\xi - \operatorname{ctg} kb - x)^2 + \\ & + [1 - x \operatorname{ctg} kb - 2\xi \operatorname{tg}(0,5kb)]^2\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где x – отношение активного сопротивления к модулю емкостного сопротивления.

Резонанс свободной пьезопластины наблюдается, когда $\tilde{k}_0 b = \pi n$ ($n = 1, 3, 5$), т. е., согласно (20), при $\operatorname{Im} A = 0$. Следовательно, из формулы (21) получим:

$$4\xi \operatorname{tg}(kb/2)(\xi - \operatorname{ctg} kb) - 2\xi + 2\operatorname{ctg} kb(1 + x^2) = 0.$$

Пренебрегая в данной формуле малыми слагаемыми, содержащими ξ , получим $\operatorname{tg}(kb/2) = (1 + x^2) / 2\xi$. Подставляя $\xi = k_t^2 / kb$, получим $kb = 2 \operatorname{arctg} \left[(1 + x^2) kb / 2k_t^2 \right] + 2\pi m$, где $m = 0, 1, 2 \dots$ и связано с номером гармоники n соотношением $m = (n - 1) / 2$. Полученное равенство является трансцендентным уравнением относительно переменной kb . Однако, как показывает дальнейший анализ, величина kb мало изменяется в зависимости от x , и решение уравнения можно упростить. При больших значениях аргумента функция arctg слабо зависит от него, поэтому, подставляя $kb \approx \pi n$ в аргумент, получим $kb = 2 \operatorname{arctg} \left[(1 + x^2) \pi n / 2k_t^2 \right] + \pi(n - 1)$ (пог-

решность определения kb при больших значениях x составляет 1,3%, завышая истинное значение, с уменьшением x погрешность существенно уменьшается). Разделив данное равенство на $k_0 b = \pi n$, получим, что относительное изменение резонансной частоты пьезопластины f_n будет равно

$$\frac{f_n}{f_{0n}} = \frac{k_r b}{k_0 b} = \frac{2}{\pi n} \operatorname{arctg} \frac{(1 + x^2) \pi n}{2k_t^2} + 1 - \frac{1}{n}, \quad (22)$$

где k_r – резонансное значение волнового числа; n – номер гармоники; f_{0n} – резонансная частота пьезопластины при $x \rightarrow \infty$, т. е. при отсутствии внешней нагрузки. Рассмотрим первую резонансную гармонику пьезопластины ($kb = \pi$). Для ниобата лития положим $k_t^2 = 0,24$. Результаты расчета по формуле (22) показаны в таблице 2.

Из таблицы видно, что максимальное влияние активного сопротивления на эффективную резонансную частоту пьезопластины проявляется при коротком замыкании электродов, т. е. при $x = 0$. Наблюдаемый эффект объясняется влиянием пьезоэффекта на модуль упругости материала пьезопластины, причем чем больше ток через сопротивление, тем больше это влияние. Результаты проведенного анализа показывают также, что подключение сопротивления уменьшает эффективную резонансную частоту пьезопластины. Влияние активной нагрузки на эффективную резонансную частоту минимально, когда активная нагрузка во много раз ($x \gg 1$) превышает емкостный импеданс пьезопластины. Например, при $x = 100$ величина $(f_{0n} - f_n) / f_{0n}$ уменьшится в 10^4 раз и влияние активной нагрузки будет достаточно мало. С увеличением номера гармоники n величина $f_n / f_{0n} \rightarrow 1$, например, при $n = 9$ и $x = 0$ величина $f_n / f_{0n} = 0,998$. Влияние активного сопротивления на эффективную частоту для пьезокварца будет на порядок меньше, чем для ниобата лития, из-за меньших значений ξ .

Рассмотренный эффект был проверен экспериментально. Электрический сигнал в импульсном методе измерения поглощения ультразвука подавался на возбуждаемую пьезопластину из ниобата лития 36° у-среза, акустический проходил через линии задержки и жидкость между ними. Затем электрический импульс наблюдался на приемной пьезопластине. При активной нагрузке 1,2 кОм, подключенной к приемной пьезопластине, частота принимаемого сигнала была 8,06 МГц. При подключении активной нагрузки

12 Ом частота принимаемого сигнала уменьшилась до 7,36 МГц в полном согласии с теоретически ожидаемым результатом.

Литература

1. Кайно Г. Акустические волны. М.: Мир, 1990. 652 с.

2. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / под ред. Мезона У. М.: Мир, 1966. Т. 1. Ч. а. С. 204-326.

3. Скучик Е. Основы акустики. М.: Ин. лит, 1959. Ч. 2. 555 с.

Таблица 1

x	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1	1.2	1.5	2	5	10	20	50	100
Q	49	25	18	12	10	9.7	9.9	10	12	25	50	98	240	490

Таблица 2

x	0	0,2	0,3	0,5	0,8	1	1,2	2	3	10
f_n / f_{0n}	0,9	0,9	0,91	0,92	0,94	0,95	0,96	0,98	0,99	1

With help of solution of wave equation and piezoelectric equations obtain expression for acoustic impedance receiving piezoelectric plate, having electric load

V.S. Kononenko, V.V. Savichev, V.E. Tiranin

With help of solution of wave equation and piezoelectric equations obtain expression for acoustic impedance receiving piezoelectric plate, having electric load. Resistive electric load have great influence on quality piezoelectric plate and diminish his frequency.



Кононенко Вадим Степанович, 1940 года рождения. Доцент физико-математических наук, профессор кафедры Пути и строительство железных дорог Самарской государственной академии путей сообщения. Занимается проблемами ультразвуковых измерений в жидкостях, разработкой новых прецизионных методов измерения, исследованием релаксационных и биологических процессов в жидкостях с помощью ультразвука



Тиранин Владислав Евгеньевич, 1977 года рождения. Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Самарского государственного архитектурно-строительного университета. В 2004 г. защитил диссертацию по специальности 01.04.17 – «Химическая физика, в том числе физика горения и взрыва». Окончил Самарский государственный университет по специальности общая и теоретическая физика. Область научных интересов: ультразвуковая спектроскопия жидкостей

Савичев Владимир Викторович, 1980 года рождения. Кандидат физико-математических наук. В 2006 г. окончил аспирантуру Самарской государственной академии путей сообщения. Окончил Самарский государственный университет по специальности «Теплофизика». Область научных интересов: ультразвуковые исследования релаксационных процессов в жидкостях