*2011 г.* *Том 14, № 3*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.372

# Решение внешних краевых задач о распространении электромагнитных волн в открытых диэлектрических структурах

*С.Б. Раевский*[1], *А.Ю. Седаков*[2], *А.А. Титаренко*[1]

[1] Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Россия, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24
[2] ФГУП «ФНПЦ НИИ измерительных систем им. Ю.Е. Седакова»
603137, Россия, г. Нижний Новгород
ул. Тропинина, 47

Предлагается метод решения внешних краевых задач для открытых направляющих диэлектрических структур произвольного поперечного сечения, объединяющий в себе аппарат интегрального представления решений в форме непрерывного спектра, метод интеграла Фурье и вариационную процедуру Галеркина.

*Ключевые слова*: задачи о распространении электромагнитных волн, внешние краевые задачи, метод интеграла Фурье, вариационный метод Галеркина, разложения по полиномам Эрмита.

## Введение

Решение задач оптимизации и синтеза поперечных сечений открытых направляющих структур, в частности, волоконных световодов [1, 2] делает актуальной разработку методов решения внешних краевых электродинамических задач, лишенных каких-либо ограничений на контуры поперечных сечений направляющих структур и характер изменения в пределах этих сечений диэлектрической проницаемости [3–5]. Развитие методов строгого анализа открытых направляющих структур требует [6, 7] привлечения аппарата непрерывного спектра решений краевых задач, что приводит к системам интегральных уравнений относительно спектральных амплитуд поля, алгебраизация которых всегда представляет собой достаточно сложную самостоятельную задачу. В настоящем докладе предлагается подход к расчету, в принципе, любых регулярных по продольной оси открытых диэлектрических волноводов (ДВ), основанный на методе интеграла Фурье [8] и модифицированном методе Галеркина (ММГ), ранее использованном для исследования электромагнитных полей в неоднородных диэлектрических средах [9–11].

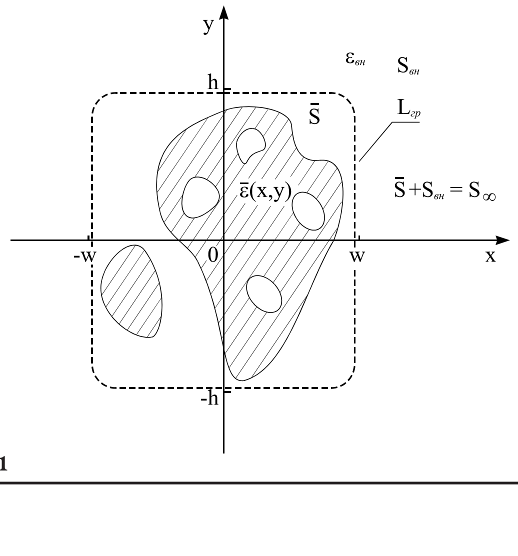


**Рис. 1**

## Формулировка метода решения краевых задач для открытых ДВ

Рассматриваем произвольную направляющую диэлектрическую структуру с конечными поперечными размерами, размещенную в неограниченной однородной внешней среде с проницаемостью $\varepsilon_{вн}$ (рис. 1). Краевую задачу ставим на однородных уравнениях Максвелла:

$$rot\,\vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H};\;\; rot\,\vec{H} = i\omega\varepsilon(x,y)\varepsilon_0\vec{E}, \qquad (1)$$

где

$$\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \bar{\varepsilon}(x,y)\ \textit{в пределах}\ \bar{S} - \\ \textit{поперечного сечения ДВ} \\ (-h \le x \le h \quad \textit{и}\ -w \le y \le w), \\ \varepsilon_{вн}\ \textit{в пределах}\ S_{вн} - \\ \textit{окружающего пространства} \\ (h < |x| < \infty \quad \textit{и} \quad w < |y| < \infty). \end{cases} \qquad (2)$$

Систему (1) сводим к уравнению:

$$rot\,rot\vec{E} = k_0^2\varepsilon(x,y)\vec{E}. \quad (3)$$

Полагая, зависимость поля от продольной координаты $z$ и времени в виде $e^{-i\beta z+i\omega t}$ (т. е. $\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}_\perp(x,y)\cdot e^{-i\beta z}$), из (3) получаем уравнения относительно составляющих электрического поля:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \left(k_0^2\varepsilon(x,y)-\beta^2\right)E_x - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y} + i\beta\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0;\\
&\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \left(k_0^2\varepsilon(x,y)-\beta^2\right)E_y - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y} + i\beta\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0; \quad (4)\\
&\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2\varepsilon(x,y)E_z + i\beta\frac{\partial E_x}{\partial x} + i\beta\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

Решения уравнений (4) будем искать [7] в виде непрерывного спектра:

$$E_x(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\rho,\kappa)\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa\,, \quad (5а)$$

$$E_y(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(\rho,\kappa)\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa\,, \quad (5б)$$

$$E_z(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(\rho,\kappa)\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa. \quad (5в)$$

Запись (5) является ничем иным, как представлением искомых решений системы (4) в виде интегралов Фурье.

Подставив (5) в (4), получаем:

$$\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\rho,\kappa)\,\kappa^2 e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa +\\
&+\left(k_0^2\varepsilon(x,y)-\beta^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\rho,\kappa)\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa + \quad (6а)\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(\rho,\kappa)\rho\cdot\kappa\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa +\\
&+\beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(\rho,\kappa)\rho\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(\rho,\kappa)\rho^2 e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa +\\
&+\left(k_0^2\varepsilon(x,y)-\beta^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(\rho,\kappa)\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa + \quad (6б)\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\rho,\kappa)\,\rho\cdot\kappa\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa +\\
&+\beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(\rho,\kappa)\kappa\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(\rho,\kappa)\,\rho^2\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa -\\
&-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(\rho,\kappa)\,\kappa^2 e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa +\\
&+k_0^2\varepsilon(x,y)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(\rho,\kappa)e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa + \quad (6в)\\
&+\beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\rho,\kappa)\rho\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa +\\
&+\beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(\rho,\kappa)\kappa\, e^{-i\rho x}e^{-i\kappa y}d\rho\, d\kappa = 0.
\end{aligned}$$

Используя равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho x}\cdot e^{i\xi x}\, dx = 2\pi\cdot\delta(\xi-\rho),$$

где $\delta$ – дельта-функция Дирака, произведем [8] над системой уравнений (6) двумерное преобразование Фурье: каждое уравнение системы (6) умножим на $e^{i\xi x}\cdot e^{i\zeta y}$ и проинтегрируем по переменным $x$ и $y$ в пределах от $-\infty$ до $\infty$.

В результате получаем систему трех уравнений:

$$\begin{aligned}
&-4\pi^2 a(\xi,\zeta)\cdot\left(\beta^2+\zeta^2\right) + k_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\rho,\kappa)\times\\
&\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(x,y)e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right]d\rho\, d\kappa +\\
&+4\pi^2 b(\xi,\zeta)\cdot\xi\cdot\zeta + 4\pi^2 c(\xi,\zeta)\cdot\beta\cdot\xi = 0,\\
&-4\pi^2 b(\xi,\zeta)\cdot\left(\beta^2+\xi^2\right) + k_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(\rho,\kappa)\times\\
&\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(x,y)e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right]d\rho\, d\kappa + \quad (7)\\
&+4\pi^2 a(\xi,\zeta)\cdot\xi\cdot\zeta + 4\pi^2 c(\xi,\zeta)\cdot\beta\cdot\zeta = 0,\\
&-4\pi^2 c(\xi,\zeta)\cdot\left(\xi^2+\zeta^2\right) + k_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(\rho,\kappa)\times\\
&\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(x,y)e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right]d\rho\, d\kappa +\\
&+4\pi^2 a(\xi,\zeta)\cdot\beta\cdot\xi + 4\pi^2 b(\xi,\zeta)\cdot\beta\cdot\zeta = 0.
\end{aligned}$$

Выполним преобразования входящих в (7) интегралов $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(x,y)e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy$. Записывая их в общем виде $\int\limits_{S_\infty} \varepsilon(S) f(S) dS$ (расположение поверхностей $S_\infty$, $\overline{S}$ и $S_{вн}$ показано на рис. 1) и учитывая равенство (2), получаем:

$$\int\limits_{S_\infty} \varepsilon(S) f(S) dS = \int\limits_{\overline{S}} \overline{\varepsilon}(S) f(S) dS +$$
$$+\varepsilon_{вн} \int\limits_{S_{вн}} f(S) dS = \int\limits_{\overline{S}} \overline{\varepsilon}(S) f(S) dS +$$
$$+\varepsilon_{вн} \left( \int\limits_{S_\infty} f(S) dS - \int\limits_{\overline{S}} f(S) dS \right) =$$
$$= \int\limits_{\overline{S}} \left(\overline{\varepsilon}(S) - \varepsilon_{вн}\right) f(S) dS + \varepsilon_{вн} \int\limits_{S_\infty} f(S) dS.$$

Отсюда, в частности, следует:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,y) e^{-i(\rho-\xi)x} e^{-i(\kappa-\zeta)y} dxdy =$$
$$= \int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-w}^{w} \left(\overline{\varepsilon}(x,y) - \varepsilon_{вн}\right) e^{-i(\rho-\xi)x} e^{-i(\kappa-\zeta)y} dxdy +$$
$$+\varepsilon_{вн} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\rho-\xi)x} e^{-i(\kappa-\zeta)y} dxdy =$$
$$= \int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-w}^{w} \left(\overline{\varepsilon}(x,y) - \varepsilon_{вн}\right) e^{-i(\rho-\xi)x} e^{-i(\kappa-\zeta)y} dxdy +$$
$$+\varepsilon_{вн} 4\pi^2 \delta(\rho-\xi)\delta(\kappa-\zeta).$$

В результате переходим к интегрированию в конечных пределах:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,y) e^{-i(\rho-\xi)x} e^{-i(\kappa-\zeta)y} dxdy =$$
$$= \int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-w}^{w} \left(\overline{\varepsilon}(x,y) - \varepsilon_{вн}\right) e^{-i(\rho-\xi)x} e^{-i(\kappa-\zeta)y} dxdy + \quad (8)$$
$$+\varepsilon_{вн} 4\pi^2 \delta(\rho-\xi)\delta(\kappa-\zeta).$$

Подставив (8) в (7), с учетом свойства δ- функции Дирака получаем систему трех интегральных уравнений:

$$4\pi^2 a(\xi,\zeta)\cdot\left(k_0^2\varepsilon_{вн} - \beta^2 - \zeta^2\right) +$$
$$+k_0^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\rho,\kappa) \left[ \int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-w}^{w} \left(\overline{\varepsilon}(x,y) - \varepsilon_{вн}\right) \times \right.$$
$$\left. \times e^{-i(\rho-\xi)x} e^{-i(\kappa-\zeta)y} dxdy \right] d\rho\, d\kappa +$$
$$+4\pi^2 b(\xi,\zeta)\cdot\xi\cdot\zeta + 4\pi^2 c(\xi,\zeta)\cdot\beta\cdot\xi = 0,$$
$$4\pi^2 b(\xi,\zeta)\cdot\left(k_0^2\varepsilon_{вн} - \beta^2 - \xi^2\right) +$$
$$+k_0^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} b(\rho,\kappa) \left[ \int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-w}^{w} \left(\overline{\varepsilon}(x,y) - \varepsilon_{вн}\right) \times \right. \quad (9)$$
$$\left. \times e^{-i(\rho-\xi)x} e^{-i(\kappa-\zeta)y} dxdy \right] d\rho\, d\kappa +$$
$$+4\pi^2 a(\xi,\zeta)\cdot\xi\cdot\zeta + 4\pi^2 c(\xi,\zeta)\cdot\beta\cdot\zeta = 0,$$
$$4\pi^2 c(\xi,\zeta)\cdot\left(k_0^2\varepsilon_{вн} - \xi^2 - \zeta^2\right) +$$
$$+k_0^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\rho,\kappa) \left[ \int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-w}^{w} \left(\overline{\varepsilon}(x,y) - \varepsilon_{вн}\right) \times \right.$$
$$\left. \times e^{-i(\rho-\xi)x} e^{-i(\kappa-\zeta)y} dxdy \right] d\rho\, d\kappa +$$
$$+4\pi^2 a(\xi,\zeta)\cdot\beta\cdot\xi + 4\pi^2 b(\xi,\zeta)\cdot\beta\cdot\zeta = 0.$$

Уравнения (9) образуют систему однородных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно неизвестных функций $a(\rho,\kappa)$, $b(\rho,\kappa)$ и $c(\rho,\kappa)$, имеющих физический смысл спектрального представления распределения поля.

При решении (9) неизвестные функции $a(\rho,\kappa)$, $b(\rho,\kappa)$ и $c(\rho,\kappa)$ будем искать в виде разложений по полиномам Эрмита, умноженным на весовые функции:

$$a(\rho,\kappa) = \sum_{k=0}^{\overline{N}}\sum_{m=0}^{\overline{N}} A_{k,n} e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}} e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}} \times$$
$$\times H_k(\alpha\rho) H_m(\chi\kappa);$$
$$b(\rho,\kappa) = \sum_{k=0}^{\overline{N}}\sum_{m=0}^{\overline{N}} B_{k,n} e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}} e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}} \times \quad (10a)$$
$$\times H_k(\alpha\rho) H_m(\chi\kappa);$$
$$c(\rho,\kappa) = \sum_{k=0}^{\overline{N}}\sum_{m=0}^{\overline{N}} C_{k,n} e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}} e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}} \times$$
$$\times H_k(\alpha\rho) H_m(\chi\kappa),$$

где α и χ − масштабирующие коэффициенты, влияющие на сходимость решения задачи.

Проекционный базис в виде полиномов Эрмита выбран в связи с их ортогональностью на бесконечном интервале, которая в дальнейшем позволит алгебраизировать интегральные уравнения. Полиномы Эрмита, умноженные на весовые функции ($U(\alpha\rho) = e^{-(\alpha\rho)^2/2} H_k(\alpha\rho)$), являются решением краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \left(2n + 1 - (\alpha\rho)^2\right) U = 0,$$

при условии нормируемости функции $U$ на интервале от $-\infty$ до $\infty$.

По аналогии с [10], для проведения алгебраизации уравнений (9) запишем (10*а*) в виде:

$$a(\rho,\kappa)=\sum_{n=0}^{N}a_n e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}}e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}}\times \times H_{k_n}(\alpha\rho)H_{m_n}(\chi\kappa);$$
$$b(\rho,\kappa)=\sum_{n=0}^{N}b_n e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}}e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}}\times \times H_{k_n}(\alpha\rho)H_{m_n}(\chi\kappa); \qquad (10б)$$
$$c(\rho,\kappa)=\sum_{n=0}^{N}c_n e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}}e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}}\times \times H_{k_n}(\alpha\rho)H_{m_n}(\chi\kappa),$$

где $N=(\bar{N}+1)^2$, а индексы $k_n$ и $m_n$ охватывают все возможные сочетания коэффициентов $k$ и $m$ из (10*а*). Например, для $\bar{N}=2$ коэффициенты примут следующие значения:

$k_0=0,\ m_0=0;\ k_1=0,\ m_1=1;\ k_2=0,\ m_2=2;$
$k_3=1,\ m_3=0;\ k_4=1,\ m_4=1;\ k_5=1,\ m_5=2;$
$k_6=2,\ m_6=0;\ k_7=2,\ m_7=1;\ k_8=2,\ m_8=2.$

Полиномы Эрмита представляются [12] в виде:

$$H_{k_n}(x)=k_n!\sum_{t=0}^{[k_n/2]}\frac{(-1)^t}{t!(k_n-2t)!}(2x)^{k_n-2t}, \qquad (11)$$

где $[k_n/2]$ означает наименьшее целое, получаемое при делении числа $k_n$ на 2.

Для сокращения записи представлений (10*а*), (10*б*) введем обозначение:

$$F_n(\rho,\kappa)=e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}}e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}}H_{k_n}(\alpha\rho)H_{m_n}(\chi\kappa) \qquad (12)$$

Полиномы Эрмита удовлетворяют [12] соотношениям ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\alpha\rho)^2}H_{k_n}(\alpha\rho)\cdot H_{k_q}(\alpha\rho)d\rho= =\begin{cases}\sqrt{\pi}\dfrac{2^{k_q}k_q!}{\alpha}, & k_n=k_q,\\ 0, & k_n\neq k_q,\end{cases} \qquad (13а)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\alpha\rho)^2}e^{-(\chi\kappa)^2}H_{k_n}(\alpha\rho)H_{m_n}(\chi\kappa)\times \times H_{k_q}(\alpha\rho)H_{m_q}(\chi\kappa)d\rho d\kappa= =\begin{cases}\Re_q=\pi\dfrac{2^{k_q+m_q}k_q!m_q!}{\alpha\chi}, & n=q.\\ 0, & n\neq q\end{cases} \qquad (13б)$$

Подставив (11), (12) в (9), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}&4\pi^2\left(k_0^2\varepsilon_{вн}-\beta^2-\zeta^2\right)\cdot\sum_{n=0}^{N}a_nF_n(\xi,\zeta)+\\&+4\pi^2\xi\zeta\sum_{n=0}^{N}b_nF_n(\xi,\zeta)+4\pi^2\beta\xi\sum_{n=0}^{N}c_nF_n(\xi,\zeta)+\\&+k_0^2\sum_{n=0}^{N}a_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\rho,\kappa)\left[\int_{-h}^{h}\int_{-w}^{w}\left(\bar{\varepsilon}(x,y)-\varepsilon_{вн}\right)\times\right.\\&\left.\times e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right]d\rho\, d\kappa=0,\\&4\pi^2\left(k_0^2\varepsilon_{вн}-\beta^2-\xi^2\right)\cdot\sum_{n=0}^{N}b_nF_n(\xi,\zeta)+\\&+4\pi^2\xi\zeta\sum_{n=0}^{N}a_nF_n(\xi,\zeta)+4\pi^2\beta\zeta\sum_{n=0}^{N}c_nF_n(\xi,\zeta)+\\&+k_0^2\sum_{n=0}^{N}b_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\rho,\kappa)\left[\int_{-h}^{h}\int_{-w}^{w}\left(\bar{\varepsilon}(x,y)-\varepsilon_{вн}\right)\times\right.\\&\left.\times e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right]d\rho\, d\kappa=0,\\&4\pi^2\left(k_0^2\varepsilon_{вн}-\xi^2-\zeta^2\right)\cdot\sum_{n=0}^{N}c_nF_n(\xi,\zeta)+\\&+4\pi^2\beta\xi\cdot\sum_{n=0}^{N}a_nF_n(\xi,\zeta)+4\pi^2\beta\zeta\cdot\sum_{n=0}^{N}b_nF_n(\xi,\zeta)+\\&+k_0^2\sum_{n=0}^{N}c_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F_n(\rho,\kappa)\left[\int_{-h}^{h}\int_{-w}^{w}\left(\bar{\varepsilon}(x,y)-\varepsilon_{вн}\right)\times\right.\\&\left.\times e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right]d\rho\, d\kappa=0.\end{aligned} \qquad (14)$$

Для алгебраизации интегральных уравнений спроецируем систему (14) на базис собственных функций, умножив ее на $F_q(\xi,\zeta)$, $q=0,1,\ldots N$, и проинтегрировав по переменным $\xi$ и $\zeta$ в пределах от $-\infty$ до $\infty$. С учетом соотношений ортогональности (13), из (14) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}&4\pi^2\left(\left(k_0^2\varepsilon_{вн}-\beta^2\right)\Re_q a_q-\right.\\&\left.-\sum_{n=0}^{N}a_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta^2F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta\right)+\\&+4\pi^2\sum_{n=0}^{N}b_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi\zeta F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta\ +\\&+4\pi^2\beta\sum_{n=0}^{N}c_n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta\ +\end{aligned} \qquad (15а)$$

$$+k_0^2\sum_{n=0}^{N} a_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(\rho,\kappa)\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_q(\xi,\zeta)\left(\int_{-h}^{h}\int_{-w}^{w}\left(\overline{\varepsilon}(x,y)-\varepsilon_{вн}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right)d\xi d\zeta\right]d\rho\, d\kappa=0,$$

$$4\pi^2\left(k_0^2\varepsilon_{вн}-\beta^2\right)\Re_q\cdot b_q-$$
$$-\sum_{n=0}^{N} b_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta+$$
$$+4\pi^2\sum_{n=0}^{N} a_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi\zeta F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta+$$
$$+4\pi^2\beta\sum_{n=0}^{N} c_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta+ \qquad (15б)$$
$$+k_0^2\sum_{n=0}^{N} b_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(\rho,\kappa)\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_q(\xi,\zeta)\left(\int_{-h}^{h}\int_{-w}^{w}\left(\overline{\varepsilon}(x,y)-\varepsilon_{вн}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right)d\xi d\zeta\right]d\rho\, d\kappa=0,$$

$$4\pi^2\left(k_0^2\varepsilon_{вн}\,\Re_q c_q-\right.$$
$$-\sum_{n=0}^{N} c_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta-$$
$$\left.-\sum_{n=0}^{N} c_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta^2 F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta\right)+$$
$$+4\pi^2\beta\sum_{n=0}^{N} a_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta+ \qquad (15в)$$
$$+4\pi^2\beta\sum_{n=0}^{N} b_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta+$$
$$+k_0^2\sum_{n=0}^{N} c_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(\rho,\kappa)\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_q(\xi,\zeta)\left(\int_{-h}^{h}\int_{-w}^{w}\left(\overline{\varepsilon}(x,y)-\varepsilon_{вн}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right)d\xi d\zeta\right]d\rho\, d\kappa=0.$$

Модификация процедуры Галеркина в предлагаемом методе заключается в использовании не пространственного базиса, а базиса спектрального представления полей. При этом применяется она непосредственно к уравнениям Максвелла, подвергнутым Фурье-преобразованию.

В результате выполненных преобразований получается система линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения $a_n$, $b_n$, $c_n$. Для записи системы уравнений (15) в матричном виде введем следующие обозначения:

$$I_{q,n}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta^2 F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta\ ;$$
$$\overline{I}_{q,n}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta\ ;$$
$$J_{q,n}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta\ ;$$
$$\overline{J}_{q,n}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta\ ; \qquad (16)$$
$$K_{q,n}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi\zeta F_n(\xi,\zeta)F_q(\xi,\zeta)d\xi d\zeta\ ;$$
$$W_{q,n}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(\rho,\kappa)\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_q(\xi,\zeta)\left(\int_{-h}^{h}\int_{-w}^{w}\left(\overline{\varepsilon}(x,y)-\varepsilon_{вн}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times e^{-i(\rho-\xi)x}e^{-i(\kappa-\zeta)y}dxdy\right)d\xi d\zeta\right]d\rho\, d\kappa.$$

Тогда система уравнений (15) запишется в виде системы матричных уравнений:

$$\begin{gathered}4\pi^2\left(\left(k_0^2\varepsilon_{вн}-\beta^2\right)\Re-I\right)a+k_0^2\,W\cdot a+\\+4\pi^2K\cdot b+4\pi^2\beta\,\overline{J}\cdot c=0,\\4\pi^2K\cdot a+4\pi^2\left(\left(k_0^2\varepsilon_{вн}-\beta^2\right)\Re_q-\overline{I}\right)b+\\+k_0^2\,W\cdot b+4\pi^2\beta\,J\cdot c=0,\\4\pi^2\beta\,\overline{J}\cdot a+4\pi^2\beta\,J\cdot b+k_0^2\,W\cdot c+\\+4\pi^2\left(k_0^2\varepsilon_{вн}\,\Re-\overline{I}-I\right)\cdot c=0.\end{gathered} \qquad (17)$$

Записав данную систему в виде одного матричного уравнения:

$$M\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=0\,, \qquad (18)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} 4\pi^2\left(\left(k_0^2\varepsilon_{вн} - \beta^2\right)\Re - I\right) + k_0^2 W & 4\pi^2 K & 4\pi^2\beta\,\overline{J} \\ 4\pi^2 K & \pi^2\left(\left(k_0^2\varepsilon_{вн} - \beta^2\right)\Re_q - \overline{I}\right) + k_0^2 W & 4\pi^2\beta\,J \\ 4\pi^2\beta\,\overline{J} & 4\pi^2\beta\,J & 4\pi^2\left(k_0^2\varepsilon_{вн}\,\Re - \overline{I} - I\right) + k_0^2 W \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

из условия нетривиальности решения системы (18) получаем дисперсионное уравнение $|M| = 0$ волн направляющей структуры, которые являются характеристическим уравнением системы интегральных уравнений (9).

## Заключение

Предложен новый метод, позволяющий строго решать краевые задачи для открытых поперечно-неоднородных продольно-регулярных направляющих структур произвольного поперечного сечения. Метод использует процедуру интегрального преобразования Фурье, и является развитием модифицированного метода Галеркина [11], является универсальным для любых открытых направляющих структур, в том числе и невзаимных. Альтернативой ему может служить лишь метод R-функций [13–14]. Вообще говоря, метод может использоваться для решению любых внешних краевых задач, не обязательно электродинамических. Численные исследования показали действенность и высокую эффективность предлагаемого метода.

## Список литературы


1. Унгер Х.Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. М.: Мир, 1980. 656 с.
2. Интегральная оптика / под ред. Т. Тамира. М.: Мир, 1978. 344 с.
3. Клеев А.И., Маненков А.Б., Рожнев А.Г. Численные методы расчтеа диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Частные методы // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 5. С. 769–788.
4. Клеев А.И., Маненков А.Б., Рожнев А.Г. Численные методы расчтеа диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Универсальные методики // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 11. С. 1938–1967.
5. Рожнев А.Г., Маненков А.Б. Расчет диэлектрических волноводов вблизи критических частот // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 7. С. 785–792.
6. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Изд. Физ.-мат. литературы, 1961. 618 с.
7. Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1963. 190 с.
8. Неганов В.А., Раевский С.Б., Ярой Г.П. Линейная макроскопическая электродинамика. Т. 1. М.: Радио и связь, 2000. 512 с.
9. Раевский С.Б., Смирнов А.А., Шишков Г.И. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородных средах // Антенны. 2005. Вып. 5 (96). С. 64–72.
10. Раевский С.Б., Редкий А.К., СмирновА.А. Расчет дисперсии волн в волокне с периодически изменяющимся вдоль оси показателем преломления // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2007. Т. 10. № 4. С. 25–25.
11. Раевский С.Б., Титаренко А.А. Метод электродинамического расчета прямоугольных закрытых волноводов с произвольным диэлектрическим заполнением // Антенны. 2007. Вып. 2 (117). С. 4–11.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: 1963. 1100 с.
13. Кравченко В.Ф., Бесараб М.А. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. М.: Физматлит, 2004. 307 с.
14. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты. М. Физматлит, 2006. 415 с.


# The solution of external boundary problems about electromagnetic waves propagation in opened dielectric structures

*S.B. Raevskii, A.Yu. Sedakov, A.A. Titarenko*

Method of solving boundary value problems for open guides dielectric structures of arbitrary cross section is proposed, combining apparatus of the integral representation of solutions in the form of a continuous spectrum of the Fourier integral method and the Galerkin variational procedure.

*Keywords*: the problem of propagation of electromagnetic waves, the external boundary value problems, Fourier integral method, the variational Galerkin method, the expansion in Hermite polynomials.