

Метод линеаризации и алгоритмы генерации нелинейных колебаний в дискретном времени

В.В. Зайцев, А.В. Карлов (мл), Г.П. Яровой

Самарский государственный университет
443011, Россия, г. Самара,
ул. Академика Павлова, 1

Линеаризованные математические модели нелинейных резонансных и автоколебательных систем используются в качестве аналоговых прототипов нелинейных динамических систем, функционирующих в дискретном времени. Приводятся примеры генерации синтезированных ДВ-осцилляторов в режимах регулярных и хаотических автоколебаний.

Ключевые слова: нелинейные колебания, автоколебания, метод эквивалентной линеаризации, дискретное время, регулярные и хаотические колебания.

Введение

Аналоговая радиотехника при обработке информации чрезвычайно широко использует инерционные преобразования сигналов нелинейными системами. Основой теоретического анализа таких преобразований служит теория нелинейных колебаний (ТНК) [1]. Иначе обстоят дела в области цифровой обработки сигналов (ЦОС). Теория и практика ЦОС в подавляющем большинстве случаев оперирует линейными системами, функционирующими в дискретном времени – линейными ДВ-системами (см., например, [2]).

По формальным признакам к нелинейным динамическим ДВ-системам наиболее близки точечные отображения, в частности отображения Пуанкаре [3]. Последние строятся на основе решений дифференциальных уравнений движения динамических систем и служат для качественного анализа особенностей поведения исходных систем в непрерывном времени. Можно также постулировать вид точечного отображения и рассматривать его как модель для описания некоторой физической ситуации. Таким путем получен ряд известных точечных отображений с регулярным и хаотическим поведением – отображения Заславского, Хенона, Холмса и другие [4, 5]. Однако весьма проблематично целенаправленно использовать эти отображения в системах ЦОС.

Поэтому представляют значительный интерес методы синтеза нелинейных ДВ-систем, позво-

ляющие воспроизводить в дискретном времени характеристики колебаний, наблюдаемых в аналоговой системе-прототипе. Один из таких методов, основанный на принципе инвариантности импульсной характеристики резонансной цепи аналоговой системы по отношению к дискретизации времени, предложен в статьях [6] и [7]. Был синтезирован ряд новых систем, генерирующих ДВ-автоколебания. В настоящей работе принцип импульсной инвариантности используется совместно с процедурой эквивалентной линеаризации ТНК.

1. Эквивалентная линеаризация и импульсная инвариантность

Линеаризация нелинейных колебательных систем широко используется как один из эвристических методов решения прикладных задач ТНК. Его теоретическое обоснование можно найти в классической монографии Н.Н. Боголюбова и Ю.Н. Митропольского [1]. Здесь мы рассмотрим метод эквивалентной линеаризации в контексте синтеза дискретных во времени нелинейных колебательных и автоколебательных систем (ДВ-осцилляторов) по аналоговым прототипам.

Пусть в непрерывном времени динамическая система резонансного типа описывается уравнением движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0 f(x) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 g(x)x. \quad (1)$$

Здесь ω_0 и Q – собственная частота и добротность линейного резонанса, а $f(x)$ и $g(x)$ – функции

диссипативной и реактивной нелинейностей системы (в дальнейшем считаются четными).

Считая собственную добротность системы высокой ($Q \gg 1$), а нелинейности – слабыми ($|f(x)| \sim 1/Q$, $|g(x)| \ll |x|$), решение уравнения (1) запишем в виде квазигармонического колебания

$$x(t) = a(t) \cos \psi(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

с медленно меняющимися амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$: $|\dot{a}(t)| \sim |\dot{\varphi}(t)| \sim 1/Q$. При этом нелинейное слагаемое в уравнении (1) приведем к виду

$$\begin{aligned} \omega_0 f(x) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 g(x)x = -\omega_0^2 \left(F_0(a) - \frac{1}{2} F_2(a) \right) \times \\ \times a \sin \psi + \omega_0^2 \left(G_0(a) + \frac{1}{2} G_2(a) \right) a \cos \psi + \\ + \text{высшие гармоники} + O\left(\frac{1}{Q^2}\right), \end{aligned}$$

где $F_n(a)$ и $G_n(a)$ – коэффициенты разложения периодических функций $f(a \cos \psi)$ и $g(a \cos \psi)$ в ряды Фурье. Теперь, пренебрегая в этом выражении слагаемыми порядка малости $O(1/Q^2)$ и «нерезонансными» слагаемыми, получим формулу первого приближения для нелинейности:

$$\begin{aligned} \omega_0 f(x) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 g(x)x = \omega_0 \left(F_0(a) - \frac{1}{2} F_2(a) \right) \frac{dx}{dt} + \\ + \omega_0^2 \left(G_0(a) + \frac{1}{2} G_2(a) \right) x. \end{aligned}$$

С учетом проведенных преобразований уравнение (1) можно записать как

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_e(a)} \frac{dx}{dt} + \omega_e^2(a)x = 0, \quad (2)$$

где эквивалентные добротность $Q_e(a)$ и частота $\omega_e(a)$ определяются выражениями:

$$\frac{1}{Q_e(a)} = \frac{1}{Q} - \left(F_0(a) - \frac{1}{2} F_2(a) \right), \quad (3)$$

$$\omega_e(a) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} G_0(a) - \frac{1}{4} G_2(a) \right). \quad (4)$$

В [1] показано, что решение линеаризованного уравнения (2) равносильно решению исходного уравнения (1), полученному в первом приближении асимптотического метода Крылова – Боголюбова или метода усреднения.

Линейный диссипативный осциллятор (2) используем в качестве аналогового прототипа для синтеза динамической системы, функционирующей в дискретном времени (ДВ-системы). Из множества известных методов синтеза линейных ДВ-систем [2] выберем наиболее обоснованный с физической точки зрения метод инвариантности импульсных характеристик. Основой мето-

да, как это отражено в его названии, является представление импульсной характеристики ДВ-системы отсчетами импульсной характеристики аналоговой системы-прототипа, взятыми с интервалом дискретизации Δ . Не останавливаясь на подробностях (см. [6, 7]), приведем полученное в рамках метода разностное уравнение движения ДВ-системы:

$$\begin{aligned} x[n] = 2 \cos(2\pi \Omega_e(a)) \alpha(a) x[n-1] - \\ - \alpha^2(a) x[n-2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\Omega_e = \omega_e \Delta / 2\pi$ – эквивалентная частота резонатора, нормированная на частоту дискретизации $\omega_d = 2\pi / \Delta$, а коэффициент $\alpha = \alpha(a)$ равен

$$\alpha(a) = \exp\left(-\pi \frac{\Omega_0}{Q_e(a)}\right). \quad (6)$$

2. Семейство нелинейных ДВ-осцилляторов

Уравнение (5) представляет собой линеаризованное уравнение движения ДВ-осциллятора. Для того чтобы превратить (5) в алгоритм генерации ДВ-колебаний, его необходимо дополнить уравнением связи между параметром a и процессом $x[n] = x(n\Delta)$. В аналоговом прототипе a – это амплитуда автоколебаний. Сохраняя физический смысл параметра, будем определять амплитуду путем квадратичного детектирования и низкочастотной фильтрации. В таком случае одно из возможных уравнений связи будет иметь вид

$$I[n] = \sigma I[n-1] + 2\pi \Omega_c x^2[n], \quad a = \sqrt{I[n-1]}, \quad (7)$$

где $\sigma = \exp(-2\pi \Omega_c)$; Ω_c – частота среза НЧ-фильтра первого порядка. Здесь также введен временной сдвиг в один интервал дискретизации.

Результатом объединения уравнений (5)–(7) является уравнение движения нелинейной рекурсивной системы – искомый алгоритм генерации ДВ-колебаний:

$$\begin{aligned} x[n] = 2 \cos\left(2\pi \Omega_e\left(\sqrt{I[n-1]}\right)\right) \alpha\left(\sqrt{I[n-1]}\right) \times \\ \times x[n-1] - \alpha^2\left(\sqrt{I[n-1]}\right) x[n-2], \end{aligned} \quad (8)$$

$$I[n] = \sigma I[n-1] + 2\pi \Omega_c x^2[n],$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(a) = \exp\left(-\pi \Omega_0 \left(\frac{1}{Q} - F_0(a) + \frac{1}{2} F_2(a)\right)\right), \\ \Omega_e(a) = \Omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} G_0(a) - \frac{1}{4} G_2(a)\right). \end{aligned}$$

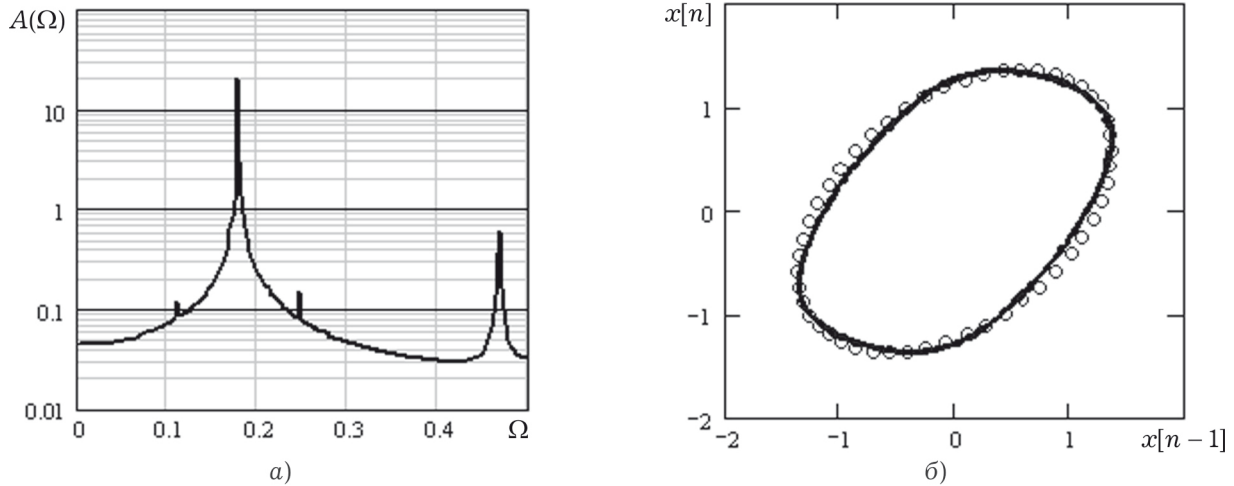


Рис. 1. Амплитудный спектр (а) и предельный цикл (б) регулярных автоколебаний

Уравнения (8) определяют семейство ДВ-осцилляторов, различающихся явным видом нелинейностей $F_i(a)$ и $G_i(a)$. Например, дискретный образ осциллятора Ван дер Поля с нелинейностью $f(x) = \gamma(1 - 4x^2)$, имеющей коэффициенты ряда Фурье $F_0(a) = \gamma(1 - 2a^2)$ и $F_2(a) = -2\gamma a^2$, задается алгоритмом генерации

$$\begin{aligned} x[n] &= 2 \cos(2\pi \Omega_0) \alpha(I[n-1]) x[n-1] - \\ &\quad - \alpha^2(I[n-1]) x[n-2], \\ I[n] &= \exp(-2\pi \Omega_c) I[n-1] + 2\pi \Omega_c x^2[n], \\ \alpha(I) &= \exp\left(-\pi \Omega_0 \left(\frac{1}{Q} - \gamma(1 - I)\right)\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для осциллятора Дюффинга с нелинейностью $g(x) = \mu x^2$ соответствующий ДВ-осциллятор из семейства (8) определяется как

$$\begin{aligned} x[n] &= 2 \cos(2\pi \Omega_e(I[n-1])) \alpha_0 x[n-1] - \\ &\quad - \alpha_0^2 x[n-2] + \xi[n-1], \\ I[n] &= \exp(-2\pi \Omega_c) I[n-1] + 2\pi \Omega_c x^2[n], \\ \Omega_e(I) &= \Omega_0 \left(1 - \mu \frac{3}{8} I\right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\alpha_0 = \exp(-\pi \Omega_0 / Q)$. В уравнение (10) введено аддитивное внешнее воздействие $\xi[n] = E \cos(2\pi \Omega n)$ с амплитудой E и частотой Ω .

Заметим, что, помимо детектирования и фильтрации по алгоритму (7), амплитуду можно определять путем вычисления скользящего среднего:

$$I[n] = \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x^2[n-m], \quad a = \sqrt{I[n-1]}. \quad (11)$$

Такое определение расширяет семейство (8) ДВ-осцилляторов.

3. Примеры генерации дискретных автоколебаний

В качестве конкретного примера рассмотрим генерацию автоколебаний ДВ-осциллятором Ван дер Поля (9). Условия самовозбуждения осциллятора нетрудно установить на основе анализа решений линейного уравнения

$$x[n] = 2 \cos(2\pi \Omega_0) \alpha(0) x[n-1] - \alpha^2(0) x[n-2],$$

описывающего колебания в окрестности нулевого состояния равновесия. Записав решение в виде $x[n] = AZ^n = A \exp(j2\pi \Omega n)$, после алгебраических преобразований находим, что самовозбуждение автоколебаний (неустойчивость состояния равновесия) имеет место при выполнении неравенства $|Z| = \alpha(0) > 1$, которое с учетом (9) сводится к неравенству $\gamma > 1/Q$. Заметим, что, согласно линеаризованному уравнению (2), это же неравенство является условием самовозбуждения автоколебаний в аналоговой системе.

Характеристики автоколебаний осциллятора (9) с параметрами $Q = 20$, $\gamma = 1.0$, $\Omega_0 = 0.18$ и $\Omega_c = 0.05$ представлены на рис. 1: амплитудный спектр $A(\Omega)$ (рис. 1, а) и фазовый портрет – предельный цикл (рис. 1, б). Амплитудный спектр вычислен по методу Бартлетта с 512-точечным преобразованием Фурье для реализации автоколебаний длиной $N = 2^{16}$. Как видно из рис. 1, а, автоколебания близки к гармоническим – третья гармоника по мощности имеет относительный уровень порядка -30 db . Этот же вывод следует и из рис. 1, б, на котором для сравнения точками показан фазовый портрет соответствующего консервативного гармонического осциллятора ($\Omega_0 = 0.18$, $Q = \infty$, $\gamma = 0$). Частота автоколебаний $\Omega_a = 0.177 \pm 0.002$ близка к частоте гармоничес-

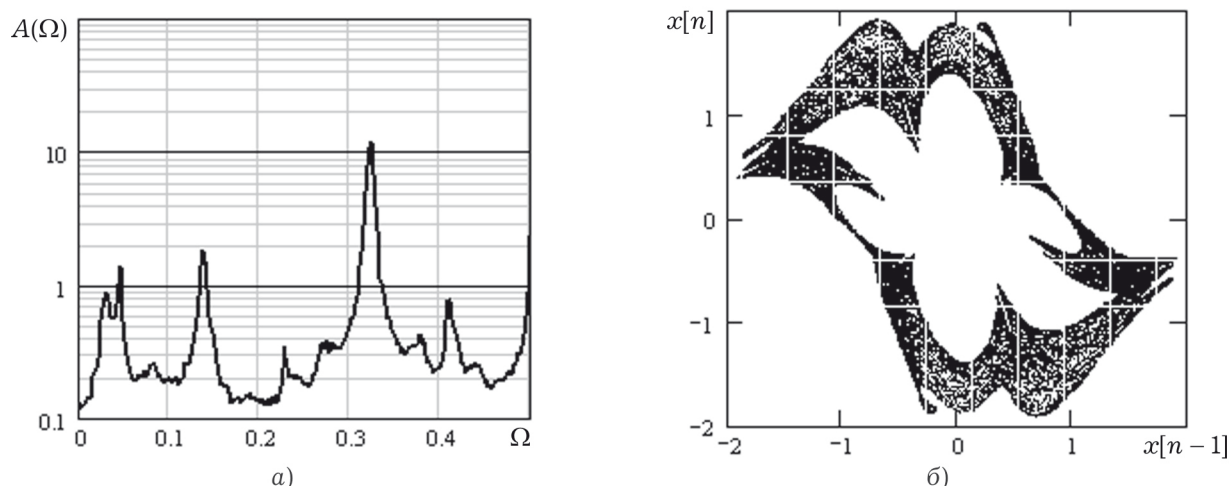


Рис. 2. Амплитудный спектр (а) и аттрактор (б) хаотических автоколебаний

кого осциллятора. В этом режиме ДВ-осциллятор предлагается использовать для нелинейной обработки дискретных сигналов [8].

Как и в большинстве ДВ-автоколебательных систем, в автогенераторе (9) наблюдаются режимы хаотических автоколебаний (динамического хаоса). Для примера приведем усредненный амплитудный спектр (рис. 2, а) и фазовый портрет (рис. 2, б) автоколебаний, возбуждающихся в осцилляторе с параметрами $Q = 20$, $\gamma = 1.78$, $\Omega_0 = 0.325$ и $\Omega_c = 0.05$. Спектр, состоящий из ряда уширенных линий, имеет вид, характерный для случайных процессов. Фазовый портрет имеет ярко выраженную фрактальную структуру со значением корреляционного показателя $\nu = 1.635 \pm 0.073$.

Области применения хаотических автоколебаний достаточно подробно описаны в литературе (см., например, [9, 10]).

Заключение

Предложенный метод линеаризации и алгоритмы генерации нелинейных колебаний дискретных систем по аналоговым прототипам не ориентирован на разработку дискретных моделей и численное моделирование систем. Он применим для создания дискретных во времени осцилляторов (алгоритмов генерации дискретных сигналов), обладающих свойствами нелинейных резонаторов и автогенераторов в непрерывном времени. Разработанные таким образом ДВ-осцилляторы имеют широкие перспективы применения для нелинейной фильтрации сигналов, генерации случайных процессов, защиты информации.

Список литературы

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974. 504 с.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
3. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 356 с.
5. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.
6. Зайцев В.В., Давыденко С.В., Зайцев О.В. Динамика автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3. № 2. С. 64–67.
7. ДВ-осцилляторы, порождаемые томсоновскими автоколебательными системами / Зайцев В.В. [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. № 4. С. 98–103.
8. Зайцев В.В., Зайцев О.В. Детектор ЧМ-сигнала на основе кольца фазовой автоподстройки частоты дискретного автогенератора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2005. Т. 8. № 1. С. 82–84.
9. Генераторы хаотических колебаний / Б.И. Шахтарин [и др.]. М.: Гелиос АРВ, 2007. 248 с.
10. Зайцев В.В., Зайцев О.В. Способ защиты информации с использованием алгоритма генерации хаотических автоколебаний // Вестник СамГУ. 2006. Вып. 9. С. 66–71.

The linearization method and algorithms of nonlinear oscillations generation in discrete-time

V.V. Zaitsev, A.V. Karlov (jr), G.P. Yarovoy

The linearized mathematical model of nonlinear resonant and self-oscillatory systems used as analog prototypes for synthesis of nonlinear dynamical systems operating in discrete time. Examples of generation of synthetic discrete in time oscillators in regimes of regular and chaotic self-oscillations are given.

Keywords: nonlinear oscillations, self-oscillations, harmonic linearization method, discrete time, regular and chaotic oscillations.

Неганов, В.А.

Теория и применение устройств СВЧ: учебн. пособие для вузов / В.А. Неганов, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радио и связь, 2006. – 720 с.

ISBN 5-256-01812-4



УДК 621.396.67

ББК 32.840

Н 41

В учебном пособии рассматриваются методы проектирования и конструктивной реализации устройств СВЧ: линий передачи различных видов, резонаторов, согласующих и трансформирующих устройств, фильтров, фазовращателей, аттенюаторов, тройниковых соединений, направленных ответвителей, различных мостовых соединений, ферритовых устройств (вентилей, циркуляторов, фазовращателей) и СВЧ-устройств на полупроводниковых диодах (умножителей, смесителей, переключателей, выключателей). Приводятся примеры применения устройств СВЧ в радиосвязи, радиолокации, измерительной аппаратуре и т. д. В книгу вошел оригинальный материал, полученный авторами. Учебное пособие может использоваться как справочник по устройствам СВЧ.

Для специалистов в области теории и техники СВЧ, преподавателей вузов, докторантов, аспирантов, студентов старших курсов радиотехнического и радиофизического профиля.